A paraître dans le compte-rendu du Séminaire Itinérant des Catégories (Octobre 2009)

A PROPOS DES SYSTEMES EVOLUTIFS A MEMOIRE ET DU MODELE MENS

par Andrée C. EHRESMANN et Jean-Paul VANBREMEERSCH*

*Université de Picardie Jules Verne
ehres@u-picardie.fr

Résumé. La première partie de cet article rappelle les résultats de notre théorie des Systèmes Evolutifs à Mémoire relatifs aux notions de catégorie hiérarchique basée et d'ordre de complexité, ce qui permet de caractériser la propriété à la base de l'émergence d'objets d'ordre de complexité croissant. Ensuite nous montrons comment une pondération d'une catégorie peut s'étendre à une de ses complexifications, et utilisons ce résultat pour transposer les équations différentielles décrivant la dynamique d'un système neuronal au système **MENS** qui modélise un système mental et cognitif ; ce système est obtenu par complexifications successives du système évolutif des neurones, et la dynamique permet de déterminer les procédures à la base de ces complexifications.

Introduction

Cet article développe un exposé fait par le premier auteur au Séminaire Itinérant des Catégories organisé par René Guitart à Paris en Octobre 2009.

Les Systèmes Evolutifs à Mémoire donnent un modèle qualitatif pour les systèmes vivants, dans le cadre de la théorie des catégories. Les propriétés d'un système vivant qu'il retient sont les suivantes : le système est ouvert au sens où il évolue dans son environnement avec possible formation ou disparition de composants ; il a une hiérarchie de composants de divers ordres de complexité (e.g., atomes, molécules, cellules,…) ; il est auto-organisé via un réseau de modules internes agissant comme systèmes régulateurs, et une mémoire centrale qui se développe au cours du temps. Nous ne rappellerons pas ici cette théorie sur laquelle nous avons publié une série d'articles depuis plus de 20 ans, repris dans un livre (Ehresmann & Vanbremeersch, 2007). Ici nous en présentons 2 aspects particuliers, avec des résultats encore inédits sur le second (qui sera développé ailleurs) :

- La notion de *catégorie hiérarchique basée*, introduite en vue d'étudier les problèmes de 'liage' et de caractériser la propriété à la base de l'émergence de composants de complexité croissante ayant des propriétés émergentes par rapport à celles du pattern de composants plus élémentaires qu'ils lient (ou 'recollent').
- La notion de *pondération* qui conduit à une quantification du modèle. Etant donnée une pondération sur une catégorie K, nous déterminons comment on peut en déduire une pondération sur une complexification de K. Ceci est appliqué pour étendre les pondérations 'délai de propagation' et 'force synaptique' à la base de la dynamique du système évolutif des neurones au modèle **MENS** pour un système mental et cognitif qui s'en déduit par complexifications successives. Les équations différentielles connues pour le système neuronal se transposent alors pour décrire quantitativement la dynamique de **MENS** et déterminer les procédures à la base des complexifications successives. .

Rappelons (EV, 1987) qu'un système complexe naturel est modélisé par un *système évolutif* **K,** formé de :

1. une *échelle de temps* T, partie finie ou non de la droite $\mathbf{R}^+$ des réels > 0 ;
2. pour chaque t de T une catégorie K_t qui modélise la configuration du système en t : les objets représentent les composants du système à cet instant et les flèches leurs interactions en cours ;

3. pour $t < t'$, un foncteur *transition* $k_{t,t'}$ d'une sous-catégorie de K_t vers $K_{t'}$; si elle existe, l'image N(t') de N(t) par $k_{t,t'}$ est appelée *état de* N(t) *en t'*. Ces foncteurs vérifient la condition de *Transitivité* : si N(t) a un état N(t') en t', alors il a un état N(t'') en t'' ssi N(t') a N(t'') pour état en t''.

Un *composant* N de **K** est un ensemble maximal d'états successifs N(t) et un *lien s* entre composants est un ensemble maximal d'états successifs de morphismes *s(t)*. Les transitions modélisent le changement de configuration entre 2 instants ; ce sont seulement des foncteurs partiels pour tenir compte de la possible perte de certains composants.
(Un système évolutif est un semi-faisceau de catégories sur la catégorie Temps, au sens de Ehresmann, 2008.)

1. Hiérarchies basées

1.1. *Catégorie hiérarchique* (EV, 1987)

Soit H une catégorie. Nous appelons *pattern dans* H un homomorphisme P d'un graphe S_P vers H. Par *composant* P_i de P nous entendons le couple d'un sommet i de S_P et de son image P(i), et un *lien distingué* de P de P_i vers P_j est l'image par P d'une flèche de S_P de i vers j. Si P admet une colimite N dans K, on dira que P est une *décomposition* de N, ou que N *recolle* P.

La catégorie H est *hiérarchique* si ses objets sont séparés en niveaux 'de complexité' 0, 1, …, m, de sorte qu'un objet N de niveau n+1 soit la colimite d'au moins un pattern à valeurs dans la sous-catégorie pleine H_n dont les objets sont de niveaux $\leq n$.

Pour tout $k < n$, l'objet N admet alors des *ramifications* arrivant au niveau k, formées d'une décomposition P de N à valeurs dans H_n, puis une décomposition de chaque P_i à valeurs dans les niveaux strictement inférieurs au niveau de P_i, et ainsi de suite jusqu'au niveau k. Le problème de l'émergence consiste à étudier dans quels cas les morphismes des niveaux supérieurs peuvent se déduire du niveau 0 par des processus 'de recollement' successifs ; ce problème conduit à la notion d'une hiérarchie 'basée'.

1.2. *Liens simples et liens complexes*

Toute catégorie H s'identifie à une sous-catégorie pleine de sa complétion 'libre', la catégorie IndK de ses ind-objets. IndK a pour objets P* les colimites (dans IndK) des petits patterns P: $S_P \to K$. Un morphisme G* de P* vers P'* est défini par :

$$G^* = \lim_i \operatorname{colim}_{i'} \mathrm{Hom}_K(P\text{ -}, P'\text{ -}).$$

Ce morphisme correspond biunivoquement à la donnée d'une *gerbe* G de P vers P', définie comme étant une famille maximale de morphismes d'un composant de P vers un composant de P' vérifiant les conditions :

1. Pour tout i de S_P, il existe dans G au moins un morphisme de P_i vers un composant de P' et, s'il y en a plusieurs, ils sont liés par un zigzag de liens distingués de P'.
2. Le composé d'un élément de G avec un lien distingué de P (à gauche) ou un lien distingué de P' (à droite) est dans G.

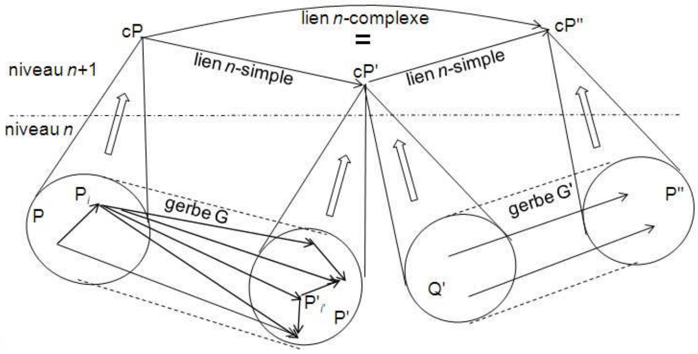
Si P et P' ont des colimites cP et cP' dans K, la gerbe G se 'recolle' en un morphisme cG de cP vers cP', qu'on appelle un *lien* (P, P')-*simple*. Le composé d'un lien (P, P')-simple et d'un lien (P', P'')-simple est (P, P'')-simple, mais nous allons voir qu'il peut exister des composés de liens simples qui ne le sont pas.

Deux patterns P' et Q' dans K sont dits *homologues* si les catégories Q'*↓K et P'*↓K sont isomorphes (exemple : si P' et Q' ont la même colimite). Des patterns homologues P' et Q' sont *connectés* s'il existe une gerbe J de P' vers Q' telle que cet isomorphisme soit défini par composition avec J* ; sinon ils sont dits *non-connectés*.

Si P' et Q' sont 2 décompositions non-connectées d'un objet C, le composé d'un lien (P, P')-simple et d'un lien (Q',P")-simple n'est généralement pas (P, P")-simple ; on l'appelle un lien (P, P")-*complexe.*

1.3. *Hiérarchie basée* (EV, 2007)

Soit H une catégorie hiérarchique. Un morphisme de H est appelé *lien n-simple* s'il recolle une gerbe entre patterns de H_n. On dit que H vérifie le *Principe de Multiplicité* s'il existe des objets C de niveau n+1, dits *multiformes,* qui sont la colimite de 2 patterns non-connectés à valeurs dans H_n.



Dans ce cas, à côté des liens n-simples il peut exister des liens *n-complexes* définis comme suit : Soit E_n la plus petite sous-catégorie de H qui contient les liens n-simples, et les morphismes recollant une gerbe contenue dans E_n ; un morphisme de E_n qui n'est pas n-simple est appelé *lien n-complexe.*

La hiérarchie de H est dite *basée* si tout morphisme est n-simple ou n-complexe.

Théorème (EV, 2007). *La hiérarchie de* H *est basée si et seulement si tout morphisme est* 0-*simple ou* 0-*complexe*

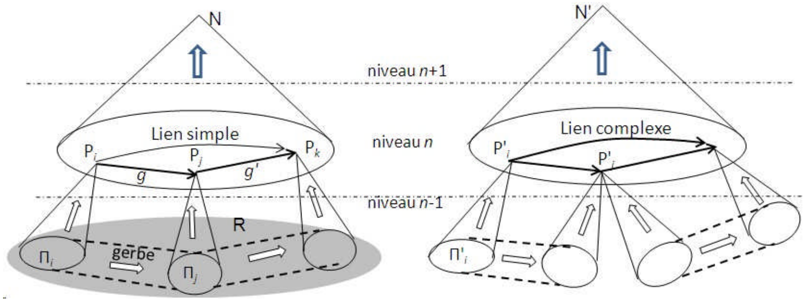
Remarque. Si H modélise une configuration d'un système évolutif, un lien n-simple de N vers N' ne fait que traduire (par recollement) au niveau n+1 des propriétés des composants de N et N' de niveaux inférieurs. Par contre un lien n-complexe modélise une propriété globale des niveaux $\leq n$, non visible 'localement' sur les composants de N et de N', et qui *émerge* au niveau n+1. Le théorème signifie que la hiérarchie est basée si elle peut être entièrement reconstruite en partant du niveau 0, par des processus de 'recollement' d'objets (construction de colimites) et de gerbes, et par composition de morphismes, ce qui traduit mathématiquement l'idée de *réductionisme émergentiste* au sens Mario Bunge (1979).

1.4. *Ordre de complexité d'un objet*

Dans une catégorie hiérarchique H, le niveau d'un objet ne donne pas une idée exacte de sa complexité au sens du nombre d'étapes nécessaires pour le 'reconstruire' à partir des niveaux inférieurs. On dit qu'un objet N est *k-réductible* s'il est la colimite d'un pattern à valeurs dans H_k et l'*ordre de complexité* de N est le plus petit k tel que N soit k-réductible. Un objet de niveau n+1 est toujours n-réductible, mais son ordre de complexité peut être < n d'après le

Théorème de réduction (EV, 1996)**.** *Soit* N *un objet de niveau* n+1. *S'il admet une ramification* (P, (Π_i)) *aboutissant au niveau* n-1 *dans laquelle les liens distingués de* P *de* P_i *vers* P_j *soient (*Π_i, Π_j*)-simples, il est* n-1-*réductible, de sorte que* N *est d'ordre de complexité* $\leq n$-1.

En effet, N est la colimite d'un grand pattern R formé des Π_i et des liens des gerbes entre eux.



Par contre un objet N' qui recolle un pattern P' ayant un lien distingué *n*-complexe peut ne pas être *n*-1-réductible. D'où

Théorème d'émergence (EV, 1996)**.** *Dans une catégorie hiérarchique, le Principe de Multiplicité est une condition nécessaire pour qu'il existe des objets d'ordre de complexité strictement supérieur à* 1.

1.5. *Construction d'une hiérarchie basée par complexifications successives*

Le processus de complexification que nous allons rappeler a été introduit (EV, 1987) pour modéliser les changements 'archétypaux' (au sens de Thom, 1974) des systèmes naturels : naissance, mort, confluence, scission. Dans un système évolutif, les foncteurs transition sont généralement associés à de telles complexifications.

Soit K une catégorie. Une *procédure* Pr sur K est définie par une esquisse de la forme suivante : son graphe multiplicatif contient : la catégorie K sauf un ensemble E d'objets 'à éliminer', une catégorie externe donnée A 'à absorber', un ensemble de cônes 'inductifs' CP, orientés de la base P vers le sommet cP, où P est un pattern sans colimite dans K 'à recoller' ; le sommet cP est choisi de sorte que, si deux patterns P et P' à recoller sont homologues, on ait cP = cP'. Les cônes distingués de l'esquisse (inductive) sont ces cônes, ainsi qu'un ensemble de cônes-colimite dans K 'à préserver'.

La *complexification* K' de K *relativement à* Pr est le prototype (au sens de Bastiani(-Ehresmann) A. & Ehresmann, C., 1972) associé à cette esquisse. Ceci signifie que K' est solution du problème universel : construire un foncteur *q* de l'esquisse vers une catégorie K' de sorte que, pour tout pattern P à recoller, *q*(cP) devienne la colimite de P, avec q(CP) pour cône-colimite..

Théorème. *Si* K *vérifie le principe de multiplicité, sa complexification* K' *aussi et, par complexifications successives, il émergera des objets d'ordre de complexité strictement croissant.*

Théorème. *Une catégorie hiérarchique* H *est basée si et seulement si elle se déduit du niveau* 0 *par une suite de complexifications relativement à des procédures exigeant seulement le recollement de certains patterns.*

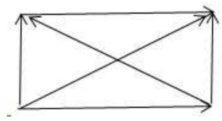
Nous utilisons aussi des complexifications 'mixtes' relativement à des procédures 'mixtes' dans lesquelles l'esquisse contient de plus un ensemble de cônes 'projectifs' dont les bases Q sont des patterns sans limite dans K, et qui sont distingués de sorte à être transformés en cônes-limite. La construction d'une complexification mixte K" se fait par récurrence, en commençant par construire la complexification K_1 de K relative aux seules colimites, puis la complexification K_2^{op} de la catégorie opposée de K_1 par adjonction à celle-ci de colimites correspondant aux limites voulues ; pour obtenir les colimites et limites voulues dans K" il faut itérer le même double processus à chaque étape (cf. EV, 2007, Chapitre 4).

2. Pondérations et dynamique d'un système évolutif. Cas de MENS

Nous commençons par rappeler un résultat (obtenu par le premier auteur : Ehresmann, 1996) qui jouera un rôle important dans la suite.

2.1. *Colimites dans les catégories libres et les groupoïdes*

Une catégorie K est *à diagonales* si tout morphisme est à la fois mono et épi et si tout carré commutatif a 2 diagonales :



Catégories libres et groupoïdes en sont des exemples.

A un pattern F: S → K on associe le pattern *saturé* F^: S^ → K associé à F : c'est le plus petit pattern ayant les mêmes composants que F et ayant pour liens distingués : les liens distingués de F, les composés *gf*: $F_i \to F_k$ de liens distingués *f*: $F_i \to F_j$ et *g* : $F_j \to F_k$ et aussi un lien distingué *h*: $F_j \to F_{j'}$ pour tout *h* tel qu''il existe dans F des liens distingués

$$f: F_i \to F_j \text{ et } f': F_i \to F_{j'} \text{ vérifiant } f' = hf$$

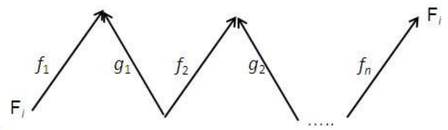
On montre que F et F^ ont la même colimite si elle existe.

Théorème (A. Ehresmann, 1996). *Dans une catégorie à diagonales, si un pattern connexe* F *admet une colimite* cF, *alors le pattern saturé* F^ *définit un préordre sur* |S^| *dans lequel deux éléments ont une borne supérieure et qui induit un ordre total sur la section* $i^{>}$. *Si de plus* F *est fini, il existe un élément maximal u, et* cF = F*(u).*

Corollaire 1. *Un pattern connexe fini dans une catégorie libre ou un groupoïde, ne peut avoir qu'une colimite triviale*.

Corollaire 2. *Dans un groupoïde* G, *un pattern* F *connexe admet une colimite si, et seulement si, il vérifie la condition suivante :*

(U) *pour tout zigzag* $(f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots, f_n)$ *de liens distingués qui va de* F_i *vers lui-même*



le composé $f_1 g_1^{-1} f_2 g_2^{-1} \ldots f_n$ *est l'identité de* F_i.

Ce corollaire (évident) est utilisé dans la proposition suivante, essentielle pour prouver le théorème de la section 2.2.

Proposition. *Soit* F *un pattern fini dans le monoïde additif* $\mathbf{R}^+$ *des réels positifs. Si* F *a une colimite lorsque considéré à valeurs dans le groupe additif* **R** *des réels, il est la base d'un et un seul cône-colimite dans* $\mathbf{R}^+$.

Preuve. Le cône-colimite de F dans **R** étant défini à un isomorphisme près, on peut en choisir un *c* tel que $c_i \geq 0$ (en 'composant' un cône-colimite dans **R** quelconque par un $a > 0$ assez grand). Comme F est fini, il existe un *i*° tel que $c_{i°} = \min_i c_i$ et on peut se ramener au cas $c_{i°} = 0$. Montrons qu'alors *c* est un cône-colimite dans $\mathbf{R}^+$. En effet tout cône *v* de base F dans $\mathbf{R}^+$ admet un recollement *v'* dans **R** qui vérifie en particulier $c_{i°} + v' = v_{i°}$ et, comme $c_{i°} = 0$, on en déduit $v' \geq 0$. Donc *v* se décompose dans $\mathbf{R}^+$, de sorte que *c* est bien un cône-colimite de F dans **R**+ (et pas seulement dans **R**).

2.2. *Pondérations*

Soit K une catégorie. Une *pondération* de K dans un monoïde M est un foncteur *d* de K vers M. Dans ce qui suit, M sera un groupe, ou un sous-monoïde de sa réflexion M' dans les groupes. Dans ces cas un pattern P dans K sera dit *d-connexe* s'il est connexe et si *d*P vérifie la condition (U) ci-dessus dans M' (c'est-à-dire admet une colimite dans M').

Dans les applications à la modélisation de systèmes complexes évolutifs, les pondérations sont utilisées pour tenir compte et quantifier les contraintes temporelles et énergétiques ; ainsi on munit généralement un système évolutif de 2 pondérations :

un *délai de propagation d* associant à chaque catégorie K_t une pondération dans le monoïde additif $\mathbf{R}^+$ des réels positifs,

une *force w* qui associe à chaque catégorie K_t une pondération dans le groupe multiplicatif **R*** des réels non nuls (ou dans son sous-groupe **I** formé des a tels que $|a| \leq 1$).

Théorème. *Soit d une pondération de* K *dans le monoïde additif* $\mathbf{R}^+$ *des réels positifs (resp. w une pondération dans le groupe multiplicatif* **I = [-1, 1]**). *Si* K' *est une complexification de* K *relativement à une procédure où tous les patterns* P *à recoller sont finis et d-connexes (resp. finis et w-connexes), la pondération s'étend en une pondération bien définie de* K'.

Preuve. On utilise la propriété universelle de la complexification K' : tout foncteur *p* de K vers une catégorie L qui applique chaque cône distingué de base un pattern P à recoller sur un cône-colimite distingué de base *p*P s'étend en un unique foncteur de K' vers L.

a) Prenons pour *p* le foncteur *d* à valeurs dans $\mathbf{R}^+$; la proposition précédente (Section 2.1) affirme que le pattern *d*P a un unique cône-colimite dans $\mathbf{R}^+$, donc *d* s'étend en une unique pondération *d'* sur K' qui applique le cône de base P et sommet cP sur ce cône-colimite.

b) Prenons pour *p* le foncteur *w* à valeurs dans **I** ; le pattern *w*P admet plusieurs cônes-colimite isomorphes, et il faut en choisir un particulier *c*, l'extension de *w* à K' dépendant de ce choix ; on choisira ce cône *c* de sorte que $\max_i c_i = 1$. Pour le construire on prend n'importe quel cône-colimite *u*, et si $\max_i |u_i| = b$ est atteint pour $i = i°$, on définit *c* par :

$$c_i = u_i/b \text{ si } b > 0 \text{ et } c_i = -u_i/b \text{ sinon.}$$

2.3 *Le système évolutif des neurones* **NEUR** *et sa dynamique*

Ses composants modélisent les neurones et leurs liens les chemins synaptiques entre eux. Ainsi la *catégorie des neurones* NEUR_t *en t* est la catégorie libre engendrée par le graphe dont les sommets 'sont' les neurones existant en *t* et les flèches les synapses entre eux (orientées du neurone pré-synaptique au neurone post-synaptique). Un objet N(*t*) de NEUR_t représente l'état d'un neurone N en *t*, déterminé par son activité *n(t)* en *t* ; celle-ci est mesurée par la fréquence moyenne de décharge de N au voisinage de *t*, que l'on calibre de sorte que la fonction *n* soit bornée par 1. Un morphisme *s(t)* représente l'état d'un chemin synaptique (= suite de synapses) *s* en *t*, déterminé par les deux pondérations du système évolutif **NEUR** :

a) La pondération *d*, à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ varie lentement avec *t* ; elle associe au chemin synaptique *s* son *délai de propagation* $d_s(t)$ en *t* qui mesure le temps nécessaire pour transmettre l'influx nerveux entre les neurones que *s* relie ; il est la somme des délais de propagation des synapses qui composent *s*.

b) La pondération *w*, à valeurs dans le groupe multiplicatif **I =** [-1, +1], associe à *s* sa *force* $w_s(t)$ qui mesure la manière dont *s* transmet l'influx nerveux ; elle est > 0 si le chemin synaptique *s* est excitateur et < 0 si *s* est inhibiteur. On suppose que *w* varie en suivant une 'règle de Hebb' que nous préciserons plus loin ; l'idée est que la force augmente si les neurones reliés par *s* ont leurs activités qui augmentent en même temps et décroît si leurs activités varient en sens opposé.

Des résultats connus sur le système neuronal assurent que l'activité $n_i(t)$ d'un neurone N_i en t est donnée par une formule de la forme (1) :

(1) $$n_i(t) = \varphi(\Sigma_s w_s(t-d_s)n_j(t-d_s) + J_i(t).$$

où : φ est une fonction sigmoïde (souvent φ = th) ; la somme est prise sur toutes les synapses s d'un neurone N_j vers N_i qui transmettent un influx arrivant à N_i en t (on suppose que leur délai de propagation d_s reste constant autour de t) ; et, si N_i est un neurone récepteur, J_i représente un possible input externe arrivant à N_i en t.
On dit que N_i est *activé* en t si $n_i(t) \neq 0$.

Considérons l'espace des états associé au système neuronal, déterminé par les activités n_i des différents neurones N_i et les forces w_s des morphismes s entre eux. Dans cet espace, la dynamique au voisinage de t (disons sur un intervalle $]t–a, t+a[$) est régie par un système d'équations différentielles du type "Cohen-Grossberg-Hopfield avec délais" :

(2)
$$dn_i(t)/dt = -n_i(t) + \Sigma_{s:N_j \to N_i} w_s(t-d_s)n_j(t-d_s) + J_i(t)$$
$$dw_s(t)/dt = e_s b(1 - w_s(t))n_i(t)n_j(t-d_s) - b'w_s(t)$$

La deuxième équation traduit une *règle de Hebb* : $0 < b' << b$ sont des constantes, $e_s = +1$ si s est excitateur ($w_s > 0$) et -1 s'il est inhibiteur. Ainsi pour un lien 'excitateur', sa force augmente si N_j est activé avant N_i et ce, d'autant plus vite que w_s est loin de son maximum ; la force diminue faiblement sinon. Pour un lien inhibiteur, la force diminue si N_i est activé après N_j.

L'imagerie cérébrale montre que la présentation d'un stimulus, ou un objet mental (au sens de Changeux, 1983), X active une assemblée de neurones synchrones (Hebb,1949) ou, plus précisément, un groupe neuronal *polychrone* (ou "time-locked") P_X au sens de Izhikevich, Gally & Edelman (2004). Si elle est maintenue, cette activation renforce la force des liens de P_X (d'après la règle de Hebb) et fera tendre la dynamique vers un attracteur (dans l'espace des états) qui mémorisera X au sens suivant : une activation ultérieure de P_X conduira au même attracteur et donc 'rappellera' X. Plusieurs groupes neuronaux polychrones peuvent être ainsi associés au même objet mental. Nous allons traduire ceci en langage catégorique.

2.4. *Le modèle* **MENS** *et sa dynamique*

Dans **NEUR,** un groupe neuronal est modélisé par un pattern fini P, et il est polychrone (au sens précédent) si P est *d*-connexe, et *w*-connexe ; on parlera simplement d'un *pattern polychrone*. On dira que P est *activé en t* si tous ses composants P_i sont activés en t. Deux patterns polychrones associés à un même objet mental sont homologues. Puisque $NEUR_t$ est une catégorie libre, le théorème de la section 2.1 montre qu'il y a peu de colimites : un pattern connexe (et en particulier polychrone) P ne peut avoir qu'une colimite triviale (ce qui donne une démonstration 'catégorique' d'un résultat de Amari et Takeuchi, 1978). Ainsi il n'y a généralement pas de "neurone de grand-mère" (Barlow, 1972) et, pour modéliser un objet mental, l'idée sera de le représenter, dans une complexification de **NEUR,** par un composant 'recollant' les divers patterns polychrones qui lui sont associés.

Ceci nous a conduit à modéliser un système mental et cognitif par un système évolutif **MENS** construit par complexifications (mixtes) successives de **NEUR.** Ses composants, appelés *neurones de catégorie* (ou *cat-neurones*) modélisent des objets mentaux de complexité croissante. Dans une première complexification, les objets mentaux correspondent à des groupes neuronaux polychrones, modélisés par la colimite de patterns polychrones. Ces patterns étant *d*-connexes et *w*-connexes, le théorème de la section 2.2 permet d'étendre les pondérations *d* et *w* de manière unique (en faisant le choix de cônes distingués indiqué dans la preuve de ce théorème). Ce processus est itéré dans les complexifications suivantes, dont les cat-neurones correspondront à des objets mentaux d'ordre de complexité croissant, recollant des patterns polychrones de cat-neurones déjà construits.

Puisque nous avons ainsi étendu les pondérations d et w à **MENS**, nous pouvons formellement définir l'activité $n(t)$ d'un cat-neurone N par la même formule (1) que pour un neurone et définir la dynamique de **MENS** par les mêmes équations différentielles (2) ci-dessus. Le problème est de savoir comment choisir les patterns polychrones à recoller à un instant t. Ce choix va être déterminé par la dynamique du système au voisinage de t, l'idée étant que les patterns à recoller soient ceux dont l'activation en t fait tendre la dynamique vers un attracteur de la dynamique. En fait, le choix ne sera pas fait directement, mais en utilisant la structure de Système Evolutif à Mémoire de **MENS** (comme expliqué dans EV, 2007, Part C) : il y aura d'abord des choix faits de manière locale, puis une compétition entre les différents choix locaux. Donnons quelques indications qui seront développées ailleurs.

MENS a un sous-système évolutif hiérarchique **Mem**, modélisant la mémoire, et des sous-systèmes évolutifs, les *corégulateurs*, qui modélisent divers modules du cerveau (ou, dans les niveaux supérieurs, leurs complexifications). Chaque corégulateur CR a une échelle de temps discrète, un certain niveau de complexité et des procédures admissibles (dans Mem). A chaque étape de son échelle de temps, disons de t à $t+\delta$, il forme son *paysage* L_{CR} qui est la catégorie suivante :

ses objets (appelés *perspectives*) sont les gerbes vers CR (considéré comme pattern dans $MENS_t$) dont la source se réduit à un cat-neurone N activé en t et qui ont au moins un élément s dont le délai de propagation est inférieur à la durée δ de l'étape ;
ses morphismes sont les liens du système corrélant deux de ces gerbes.

On a un foncteur 'différence' D de L_{CR} vers $MENS_t$ qui associe à une perspective sa source. Une procédure admissible Pr_{CR} sera choisie sur $D(L_{CR})$ en utilisant en particulier les perspectives issues de **Mem** ; elle aura pour patterns à recoller les patterns polychrones P à valeurs dans $D(L_{CR})$ dont l'activation en t fait tendre la dynamique vers un attracteur pendant l'étape. Ainsi Pr_{CR} devrait conduire à la formation d'un cat-neurone colimite de P, ou, si P a déjà une colimite cP, à l'activation de cP.

Toutefois il n'en est pas toujours ainsi car les procédures Pr_{CR} des divers corégulateurs CR sont à effectuer sur **MENS** (et non dans leur paysage), et elles ne sont pas toujours compatibles entre elles. Certaines seront alors écartées (via ce que nous appelons le "jeu entre les procédures"). La procédure globale effectivement réalisée aura pour patterns à recoller les patterns polychrones Q dont l'activation fait tendre la dynamique globale vers un attracteur A_Q et dont les sous-patterns maximaux à valeurs dans un $D(L_{CR})$ figurent parmi les patterns à recoller dans P_{CR}. Le cat-neurone colimite de Q deviendra un objet de **Mem** qui mémorise l'objet mental activant Q (et par là modélise l'attracteur A_Q).

Références

Amari S. and Takeuchi, A., 1978, Mathematical Theory on Formation of Category Detecting Nerve Cells, *Biol. Cybernet.* 29, 127-136.
Barlow, H.B., 1972, Single units and sensation: A neuron doctrine for perceptual psychology? *Perception* 1, 371-394
Bastiani(-Ehresmann), A & Ehresmann, C., 1972, Categories of sketched structures, *Cahiers Top. et Géom. Dif.* XIII-2, reprinted in *Charles Ehresmann, Œ uvres complètes et commentées*, Partie IV-1 (Ed. A.C. Ehresmann), Amiens, 1983.
Bunge, M., 1979, *Treatise on Basic Philosophy*, Vol. 4, Reidel, Dordrecht.
Changeux, J.-P., 1983, *L'homme neuronal*, Fayard, Paris.
Ehresmann, A.C., 1996, Colimits in free categories, *Diagrammes,* 37, 1-10.
Ehresmann, A.C., 2008, From Schwartz distributions to control and evolutive systems, Conference on categories, Calais. http://pagesperso-orange.fr/ehres
Ehresmann, A.C. & Vanbremeersch J.-P., 1987, Hierarchical Evolutive Systems: A mathematical model for complex systems, *Bull. of Math. Bio.* 49 (1), 13-50.
Ehresmann, A.C. & Vanbremeersch J.-P., 1996, Multiplicity Principle and emergence in MES, *Journal of Systems Analysis, Modelling, Simulation* 26, 81-117.
Ehresmann, A.C. & Vanbremeersch J.-P., 2007, *Memory Evolutive Systems: Hierarchy, Emergence, Cognition*, Elsevier.
Ehresmann, A.C. & Vanbremeersch J.-P., 2009, MENS, a model for *Journal of Mind Theory,* 0-2,
Hebb, D. O., 1949, *The organization of behaviour,* Wiley, New York.
Izhikevich, E.M,, Gally, J.A. & Edelman, G, M., 2004, Spike-timing dynamics of neuronal groups, *Cerebral Cortex* V. 14, 933-944.
Thom, R., 1988, *Esquisse d'une Sémiophysique*, InterEditions, Paris.