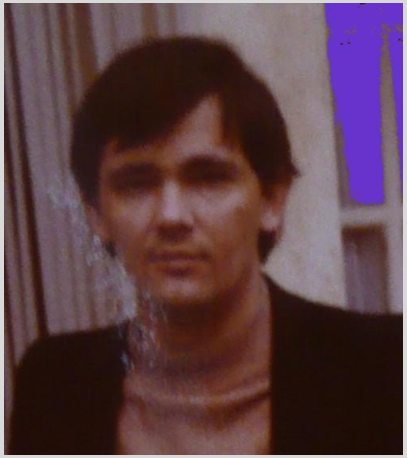
Parcours d'un mathématicien aux multiples facettes

par

Andrée C. Ehresmann

Université de Picardie Jules Verne
http://ehres.pagesperso-orange.fr
http://vbm-ehr.pagesperso-orange.fr



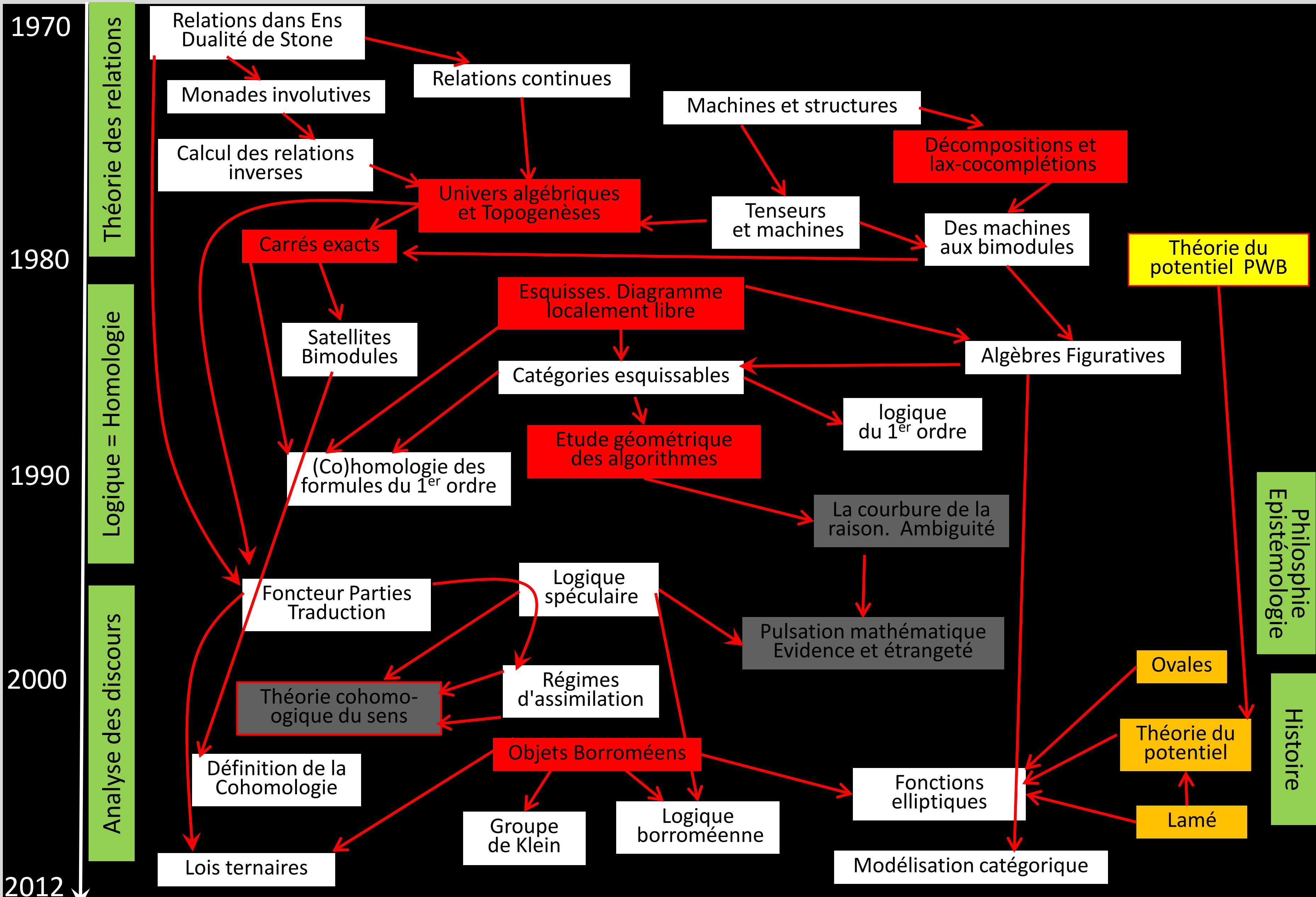
COURTE BIOGRAPHIE

Doctorat 3^{e} cycle (équipe TAC), Paris 7, Juin 1970.
Doctorat d'Etat (équipe TAC), Amiens, Juin 1979.
Habilitation, Paris 7, 1988.

Assistant Amiens 1968-1970 (puis en heures supplémentaires)
Maitre Assistant, puis Maître de Conférences à Paris 7, depuis 1970.
Il a dirigé les thèses de Luc Van den Bril (Amiens, 1978), Matthias Gerner (Paris 7, 1994), Monique Sassier (Paris 7, 2002) et l'Habilitation de Pierre Damphousse (Tours, 2003).
Il a organisé de nombreuses rencontres mathématiques de toute nature.

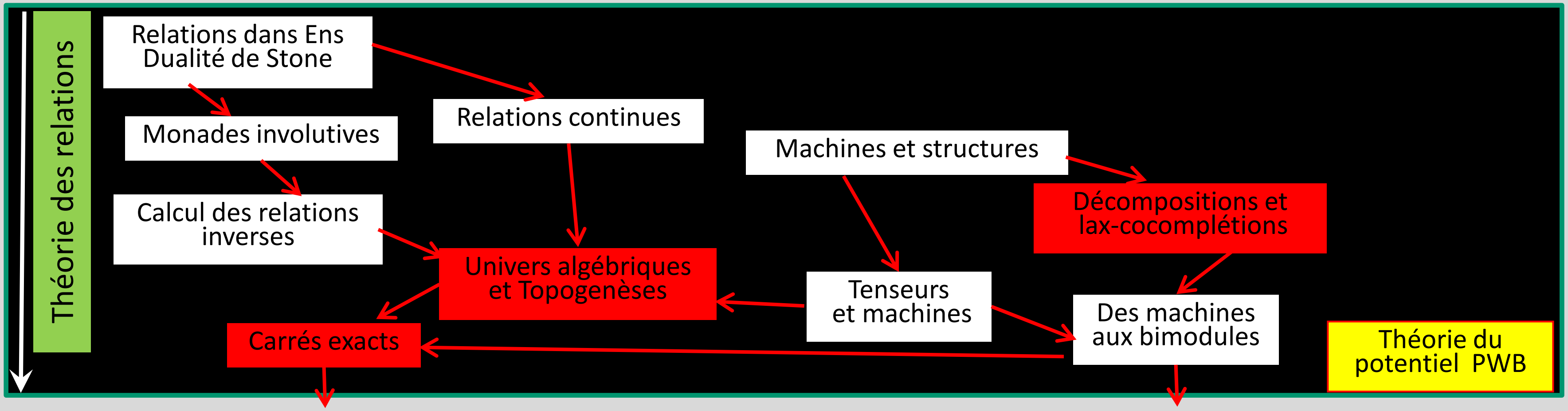
Conseiller scientifique chez ESSILOR de 1982 à 1992
Directeur de Programmes au Collège International de Philosophie de 1992 à 1998, où il a dirigé les Diplômes du CIPh de Bahia Monti, George Monti et Catherine Cyzinski.

LE SYSTÈME EVOLUTIF DES TRAVAUX DE RENE



1970-1980 : THEORIE DES RELATIONS

A Chantilly, le dernier jour de la
2$^{\text{ème}}$ Conférence sur l'Algèbre des Catégories
(Amiens, Juillet 1975)



Développer une théorie des relations dans une catégorie :

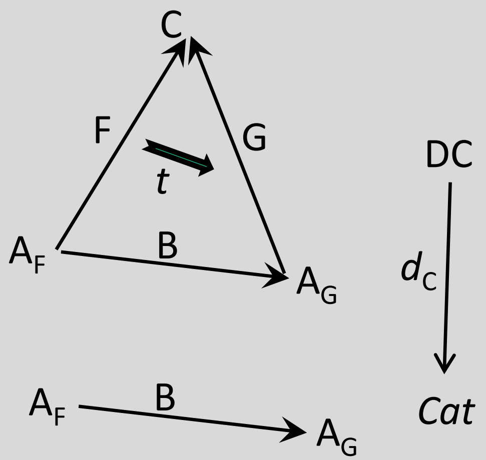
1. Dans Ens, relation A -> B = application de A dans *P*(B) ===> la *catégorie des relations* 'est' la catégorie de Kleisli *KlP* de la monade des parties .

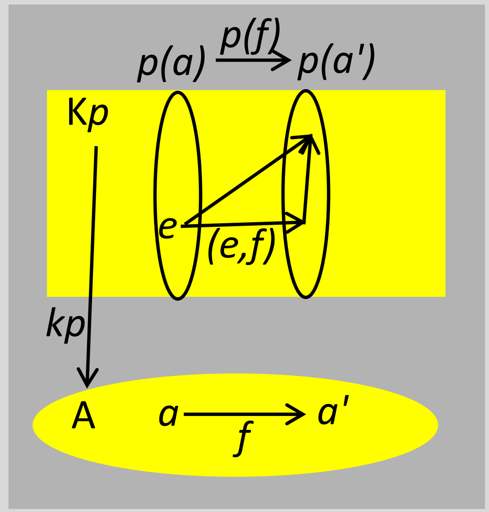
2. Dans une catégorie C munie d'une monade, prendre pour catégorie des relations la catégorie de Kleisli associée à la monade. Applications :
= relations continues dans diverses catégories de nature 'topologique' ;
= dans Cat, relations associées à la "monade des diagrammes" .

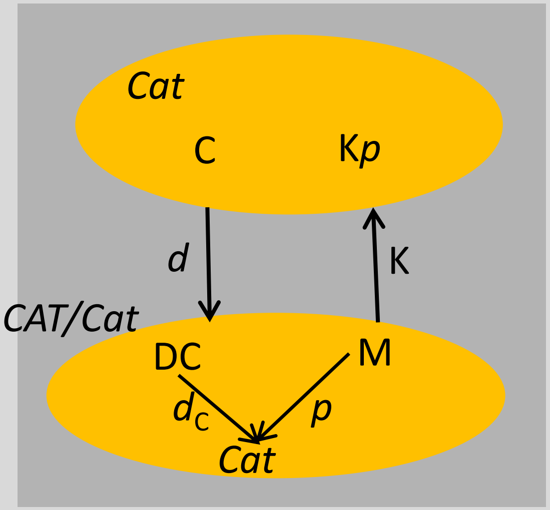
3. Conditions sur une monade sur C pour obtenir une logique du 1er ordre ===> Univers Algébriques (ex.: topos, ensembles flous), Topogenèses.

4. *Carrés exacts* et relations associées à un ensemble de carrés exacts.

MONADE DES DIAGRAMMES







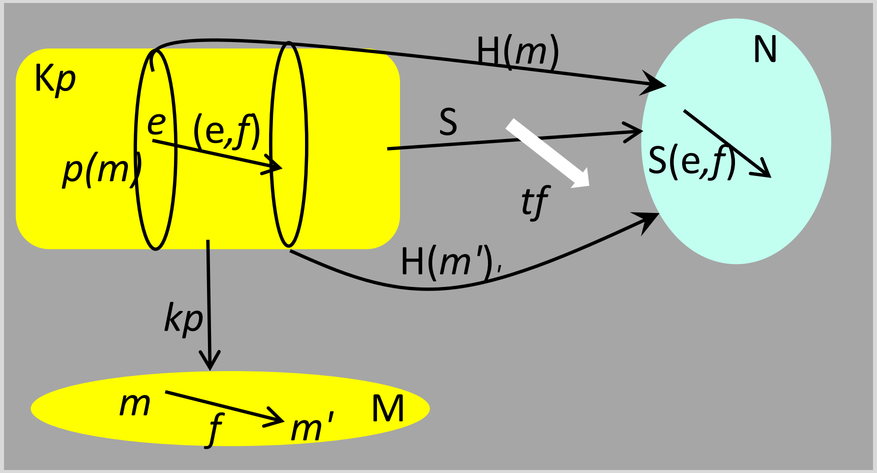
Soit DC la catégorie des *diagrammes* de C et d_C: DC → *Cat*.
Soit *kp*: K*p* → M la fibration associée à un foncteur *p*: M → *Cat*

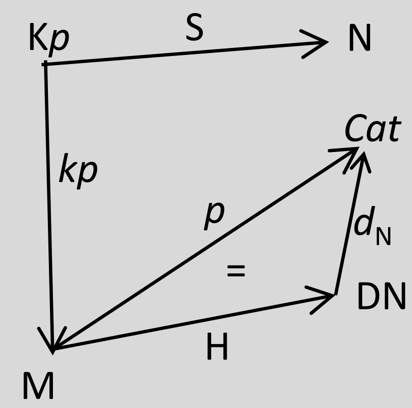
Théorème *(Guitart-Van den Bril, 1977). 1. Le foncteur d*: *Cat* → *CAT/Cat associant* d_C *à* C a pour *adjoint le foncteur* K *associant* K*p à p ; d'où la monade d* (à isomorphisme près) sur Cat.*
2. DC *s'étend en une 2-catégorie* **D**C *qui est la lax-cocomplétion de* C.

La catégorie de Kleisli *Kld** joue le rôle d'une catégorie des relations sur *Cat.*

*d** s'étend en une 2-monade (à isomorphisme près) ***d**** sur ***Cat*** ; la 2-catégorie de Kleisli associée est notée ***Kl*d***.

MACHINES





Une *machine* d'entrée M et sortie N est définie par un span (*kp*, S), où *kp*: K*p* → M est la fibration associée à un foncteur *p*: M → *Ens* et S: K*p* → N est un foncteur. On retrouve une machine de Mealy si M et N sont des monoïdes, *p* est à valeurs dans *Ens* et K*p* se réduit à un produit MxE.
Les machines sont les 1-morphismes d'une 2-catégorie ***Mac.***

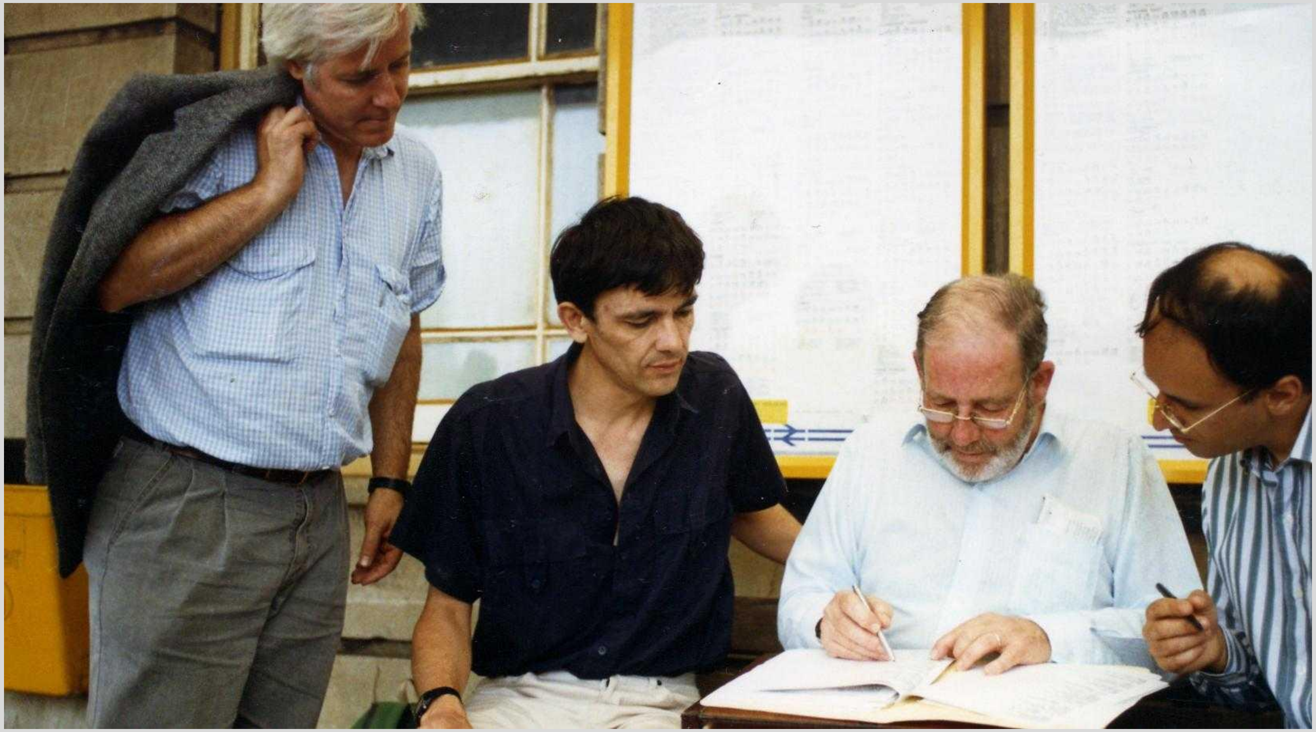
Théorème. *On a un* 2-isomorphisme Γ de ***Mac*** sur ***Kld**** *et un plongement plein et 2-plein* Π *de* ***Mac*** *dans la 2-catégorie des distributeurs.*

Γ(*kp*, S) = H: M → DN avec H(*m*) = S|*p(m)* et H(*f*) = (*p(f), tf*)

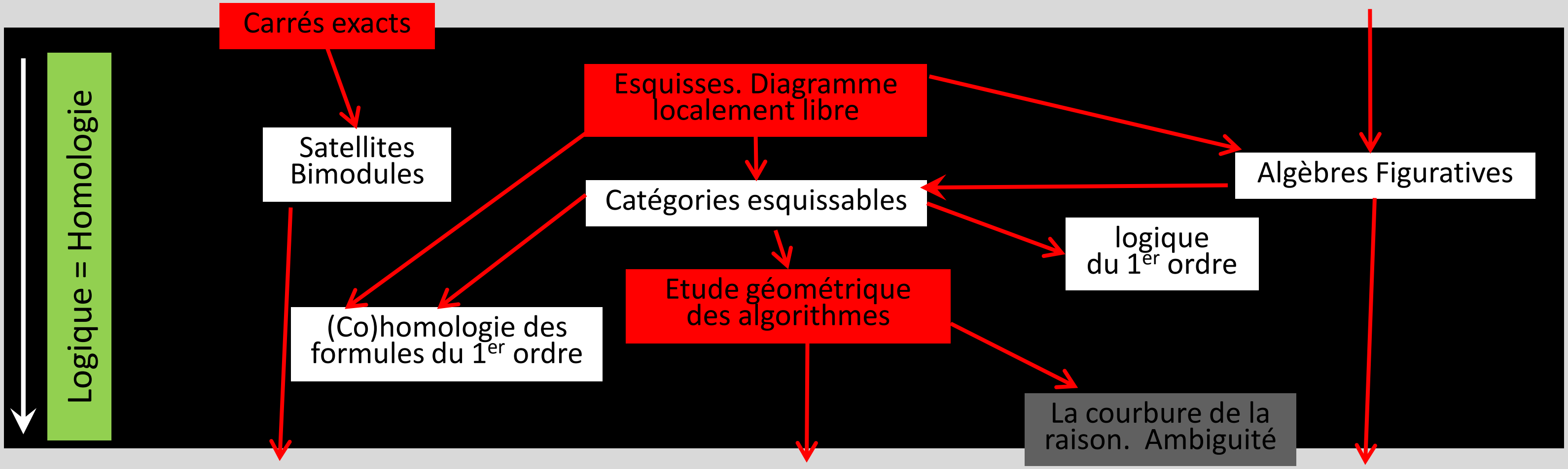
où *tf* est la transformation naturelle telle que *tf(e) = S(e, f*).

Π(*kp*,S) = S¤*kp* (composition des distributeurs).

1981-1992 : ESQUISSES. LOGIQUE ET HOMOLOGIE



Bangor, 1989 : Rosebrugh, Guitart, Kelly, Prouté



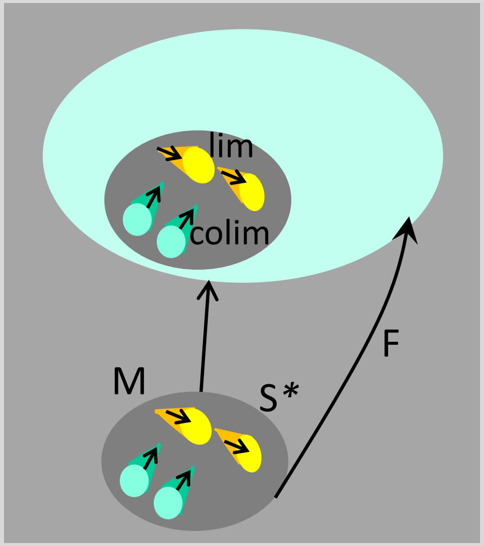
Utiliser la théorie des esquisses pour prouver que logique = homologie.

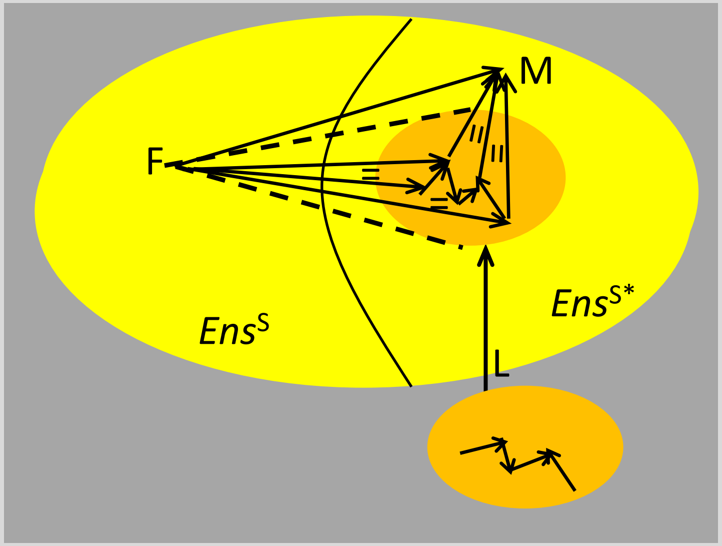
1. Etude des esquisses mixtes et théorème du diagramme localement libre pour ces esquisses (avec Lair)

2. Présentation logique des esquisses (sous forme d'esquisse concrète) et calcul logique sur les formules internes utilsant les carrés exacts.
===> Toute théorie logique du 1er ordre est esquissable.
Application: esquisse de programmes, algorithmes.

3. Introduction d'une notion de satellite d'un foncteur relativement à un distributeur ou un carré exact.
===> Cohomologie non abélienne sur *Cat* associée à un distributeur de *Cat* vers *Cat* étendant EXT.

DIAGRAMME LOCALEMENT LIBRE



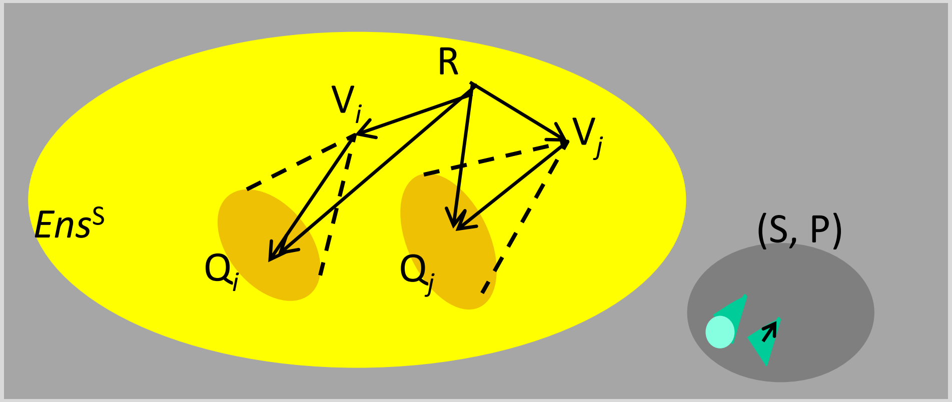


Soit S* = (S, P, I) une esquisse (mixte) : S = catégorie, P = {cônes projectifs}, et I = {cônes inductifs}. Un *modèle* de S* dans C est un M: S → C transformant les cônes de P en limites et ceux de I en colimites.

*T*HÉORÈME *(Guitart-Lair* 1981). *A tout foncteur* F *de* S *vers Ens est associé un petit* **diagramme localement libre** L *dans la catégorie Ens*$^{S^*}$ *des modèles de* S* *vérifiant* : L *est base d'un cône de sommet* F *qui est validé par tout modèle* M *de* S* *au sens que tout* F → M *se factorise par un unique zig-zag de génératrices..*

L n'est pas unique ; il généralise la notion de spectre d'un anneau local.
En 1997, une preuve plus 'effective' est donnée avec Gerner.

ESQUISSES CONCRETES. CALCUL LOGIQUE



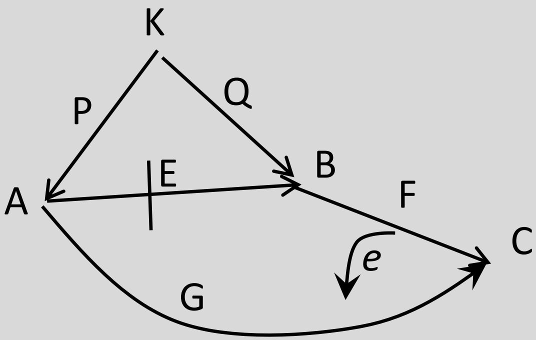
Esquisse concrète **S** = (S, P, Q) où (S, P) = esquisse projective, Q = famille (Q_i) de cônes projectifs dans *Ens*^{S}, appellés **S**-*formules.* Un *modèle* de **S** est un modèle R de (S, P) qui valide tous les Q_i.

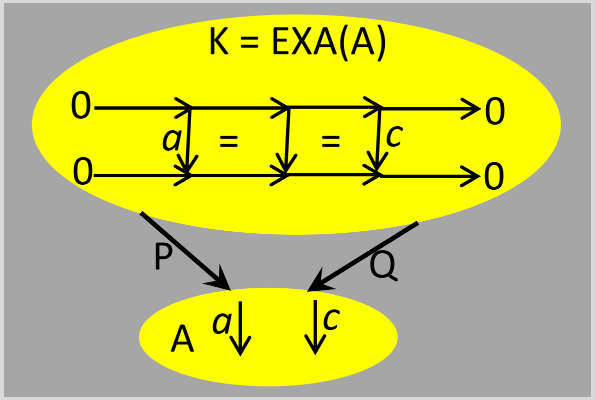
Une esquisse S* = (S, P, I) détermine l'esquisse concrète **S** = (S, P, Y(I)) dont les **S**-formules sont les images par Y: $S^{op} \to Ens^S$ des cônes dans I.

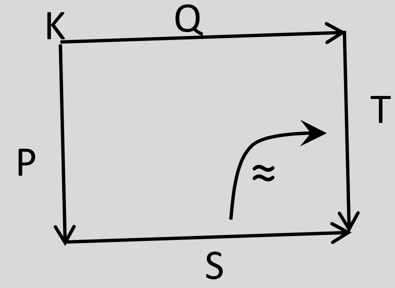
THÉORÈME. S* *et* **S** *ont les même modèles. Esquisses concrètes et esquisses déterminent les mêmes catégories 'esquissables' .*

Les formules du 1er ordre peuvent s'exprimer sous forme de **S**-formules
===> Une théorie logique du 1er ordre est esquissable et l'on développe un calcul logique basé sur les seules notions de (co)limites et carrés exacts.

SATELLITES







Q¤P ≈ T ¤S ≈ E

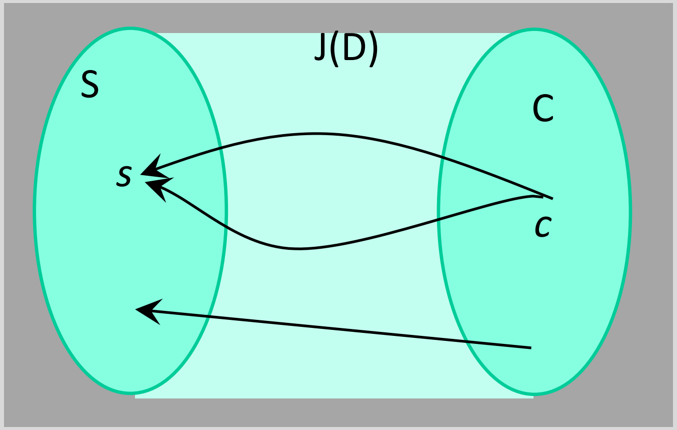
Soit E: A -|→ B un distributeur. Pour un foncteur F: B → C, le *satellite* de F pour E est un couple (G, *e*) universel tel que G: A → C et *e*: F¤E => G.

Pour rendre effectif le calcul des satellites, on utilise des *présentations* de E. Ainsi lorsque E = Q¤P où P: K → B et Q: K → A, alors G est le satellite de F ssi il existe F.Q => G.P universel.

Exemple : A = B est abélienne et K est formé de ses suites exactes courtes ===> E = EXT et le satellite de F: A → C devient le satellite gauche usuel.

A l'aide de *bi-présentations* de E sous forme de carré exact, le calcul des satellites peut utiliser le calcul sur les carrés exacts.

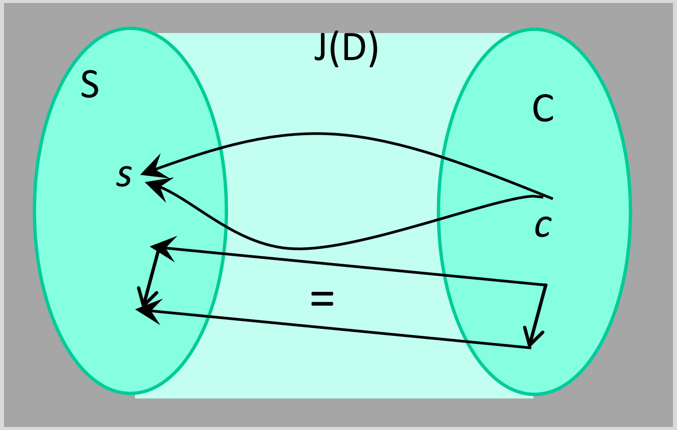
COHOMOLOGIE NON ABELIENNE

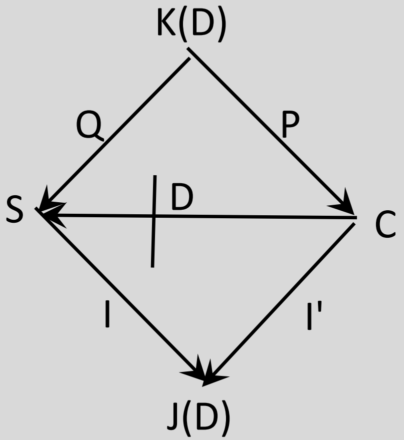


On définit des foncteurs J et K de la catégorie des distributeurs vers *Cat* comme suit :

J associe au distributeur D de C vers S la *catégorie joint* J(D) : elle a C et S pour sous-catégories et J(D)(*c, s*) = D(*c, s*).

COHOMOLOGIE NON ABELIENNE

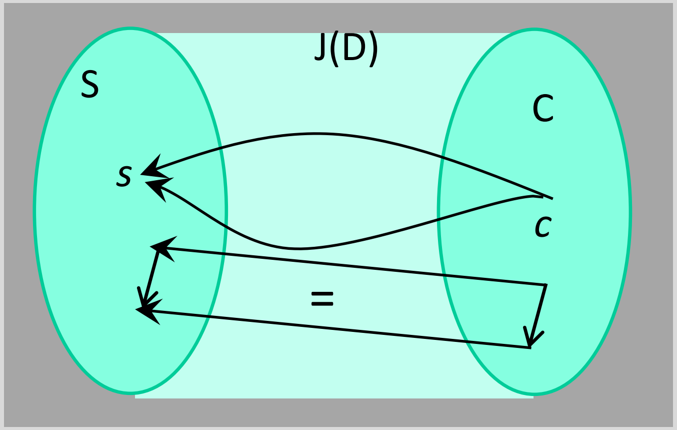


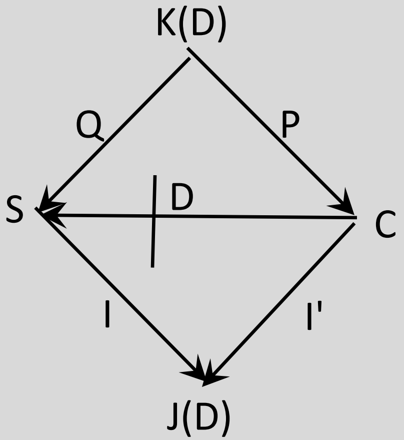


On définit des foncteurs J et K de la catégorie des distributeurs vers *Cat* comme suit :
J associe au distributeur D de C vers S la *catégorie joint* J(D) : elle a C et S pour sous-catégories et J(D)(*c, s*) = D(*c, s*).

K associe à D la catégorie K(D) ayant pour objets les flèches de J(E) de C vers S et pour morphismes des carrés commutatifs de J(D).

COHOMOLOGIE NON ABELIENNE





On définit des foncteurs J et K de la catégorie des distributeurs vers *Cat* comme suit :

J associe au distributeur D de C vers S la *catégorie joint* J(D) : elle a C et S pour sous-catégories et J(D)(*c, s*) = D(*c, s*).

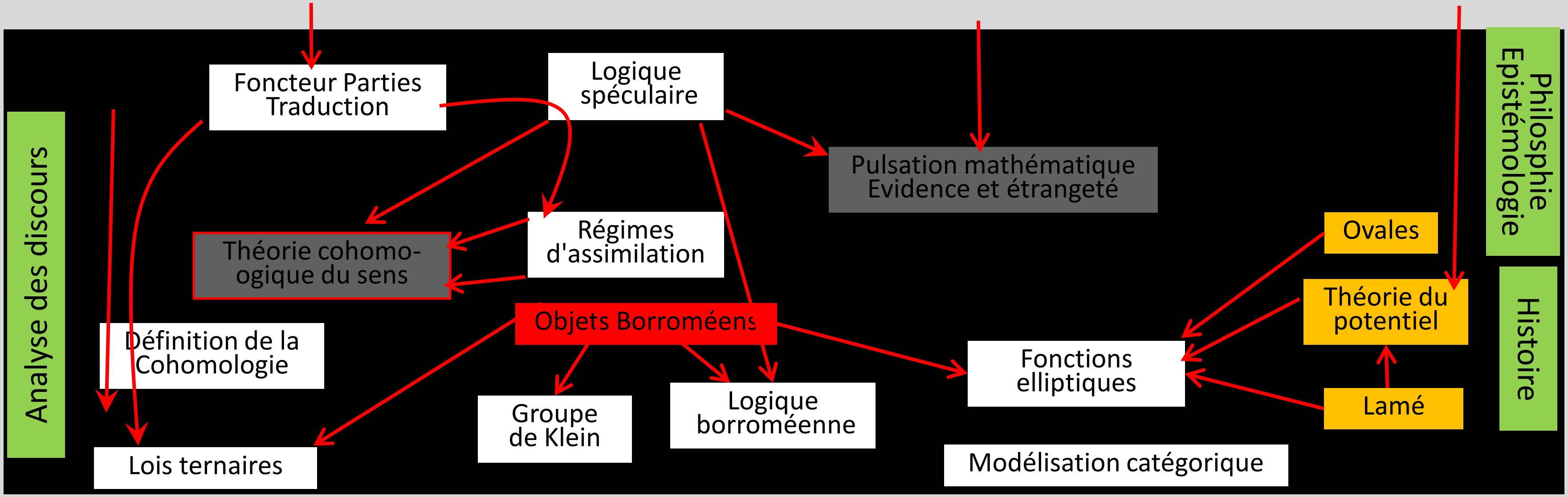
K associe à D la catégorie K(D) ayant pour objets les flèches de J(E) de C vers S et pour morphismes des carrés commutatifs de J(D).

Le distributeur BIM = J¤K°: *Cat* → *Cat* redonne EXT dans le cas abélien.

Le calcul des satellites relatifs à BIM est à la base d'une cohomologie non abélienne sur *Cat*, calculable à l'aide de carrés exacts.

1993-2012 : COMPRENDRE LE SENS

International Category Theory Conference,
Genoa 2010



"Comprendre le sens" par différentes approches.

1. Compléments sur le foncteur "Parties". Construction d'un cadre général pour une (co)homologie non abélienne.

2. Travaux de nature philosophique, épistémologique ou psychanalytique sur l'analyse des discours (considérés comme 'êtres 'vivants'), conduisant à une modélisation mathématique des notions d'ambiguité, logique spéculaire et régimes d'assimilation.

===> Etude des objets borroméens (e.g. groupe de Klein) et de la logique borroméenne.

3. Divers articles historiques.

COMPLEMENTS SUR LE FONCTEUR PARTIES *P*

1. *L'enveloppe karoubienne* d'une catégorie C est la catégorie ayant pour objets les (*c, e*) où *e: c* → *e* est un idempotent.

Théorème *(Guitart-Riguet, 1992). L'enveloppe karoubienne de la catégorie des relations KlP est isomorphe à la catégorie des treillis complets complètement distributifs avec applications sup-compatibles. KlP s'identifie à la sous-catégorie pleine dont les objets sont booléens.*

COMPLEMENTS SUR LE FONCTEUR PARTIES *P*

1. *L'enveloppe karoubienne* d'une catégorie C est la catégorie ayant pour objets les (*c, e*) où *e: c* → *e* est un idempotent.

Théorème *(Guitart-Riguet, 1992). L'enveloppe karoubienne de la catégorie des relations KlP est isomorphe à la catégorie des treillis complets complètement distributifs avec applications sup-compatibles. KlP s'identifie à la sous-catégorie pleine dont les objets sont booléens.*

2. Caractérisation des sous-foncteurs B de *P* tels que B(A) contienne le vide pour tout A (appelés *bornes*). En vue d'une théorie de la traduction, caractérisation avec Damphousse des transformations naturelles de *P'* vers *P'P"*, où *P'* et *P"* sont soit *P, soit* l'un des 2 autres foncteurs (dont l'un contravariant) associant *P*(E) à E.

Classification des *fixob,* ou foncteurs F: S → S fixant les objets, où S est une sous-catégorie pleine de *Ens.*

Théorème *(Guitart-Damphousse, 1999)*. Si *les objets de* S *sont finis, un* fixob *est isomorphe à l'identité ssi* S *a au moins trois objets non-vides non-isomorphes.*

ANALYSE DES DISCOURS

Modèle mathématique (basé sur des foncteurs adjoints) de la *logique spéculaire* qui intervient dans les discours, prenant en compte l'ambiguité et le jeu local/global.

Exemple : pulsation mathématique à la base de toute activité mathématique.

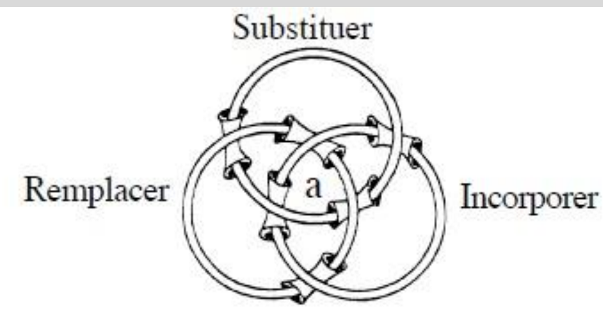
Le sens d'un discours, conçu au travers de l'auto-mouvement entre les différentes logiques de ses présupposés, est représenté par une classe de cohomologie d'un espace déterminé par le discours.

ANALYSE DES DISCOURS

Modèle mathématique (basé sur des foncteurs adjoints) de la *logique spéculaire* qui intervient dans les discours, prenant en compte l'ambiguité et le jeu local/global.
Exemple : pulsation mathématique à la base de toute activité mathématique.

Le sens d'un discours, conçu au travers de l'auto-mouvement entre les différentes logiques de ses présupposés, est représenté par une classe de cohomologie d'un espace déterminé par le discours.

L'étude de la notion d'assimilation, vue comme "nouage des verbes remplacer, substituer, incorporer" en un nœud borroméen, est à la base de plusieurs travaux récents sur les objets borroméens (e.g. groupe de Klein) et la logique borroméenne.



Guitart, 2001

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

En 1979, travail de synthèse sur la théorie du potentiel au travers des travaux d'axiomatisation à la Perron-Wiener-Brelot (2nde thèse donnée par Gustave Choquet).
Plus tard, travail historique sur la théorie du potentiel en relation avec les fonctions elliptiques.

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

En 1979, travail de synthèse sur la théorie du potentiel au travers des travaux d'axiomatisation à la Perron-Wiener-Brelot (2nde thèse donnée par Gustave Choquet).
Plus tard, travail historique sur la théorie du potentiel en relation avec les fonctions elliptiques.

2 articles historiques sur les ovales cartésiennes (avec Evelyne Barbin) :
= diverses descriptions et constructions des ovales ;
= relations entre ovales et fonctions elliptiques.

Travail historique sur Lamé, montrant comment il est conduit par des problèmes de physique à l'introduction des coordonnées curvilignes et à leurs relations avec les fonctions elliptiques.

(CO)HOMOLOGIE ANABELIENNE

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "J"] \arrow[d, "F"'] & X \\ P \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, bend right, "R"'] & C \end{tikzcd}$$

Définir l'homologie et la cohomologie des objets de X à valeurs dans C relativement à une donnée $\Phi = [J; L,R]$ de 3 foncteurs : $J : M \to X$ décrivant les 'modèles' dans X, L et R de P vers C donnant des présentations des objets de C.

Exemple : C = *Ab,* P = $EXA^n(Ab)$, L (resp. R) associe à une suite son 1er (resp. dernier) élément.

(CO)HOMOLOGIE ANABELIENNE

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "J"] \arrow[d, "F"'] & X \\
P \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, bend right, "R"'] & C
\end{tikzcd}$$

Définir l'homologie et la cohomologie des objets de X à valeurs dans C relativement à une donnée Φ = [J; L,R] de 3 foncteurs : J : M → X décrivant les 'modèles' dans X, L et R de P vers C donnant des présentations des objets de C.

Exemple : C = *Ab,* P = EXA^n(Ab), L (resp. R) associe à une suite son 1er (resp. dernier) élément.

Pour F: M → C on définit la *catégorie d'homologie* H_{*F} pour F ; ses objets sont de la forme μ = (A, B, *a,* b), où :

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "F"'] \arrow[d, "A"] \arrow[r, "J"] \arrow[dl, phantom, shift right=3, "a"] & X \arrow[d, "B"] \\
C & {} \arrow[l, "L"] \arrow[r, "R"'] \arrow[ur, phantom, "b"] & C
\end{tikzcd}$$

(CO)HOMOLOGIE ANABELIENNE

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "J"] \arrow[d, "F"'] & X \\
P \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, bend right, "R"'] & C
\end{tikzcd}$$

Définir l'homologie et la cohomologie des objets de X à valeurs dans C relativement à une donnée $\Phi = [J; L,R]$ de 3 foncteurs : $J : M \to X$ décrivant les 'modèles' dans X, L et R de P vers C donnant des présentations des objets de C.

Exemple : C = *Ab,* P = $EXA^n(Ab)$, L (resp. R) associe à une suite son 1er (resp. dernier) élément.

Pour $F: M \to C$ on définit la *catégorie d'homologie* H_{*F} pour F ; ses objets sont de la forme $\mu = (A, B, a, b)$, où :

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "J"] \arrow[dl, "F"'] \arrow[d, "A"] \arrow[dl, phantom, shift right=3, "a"] & X \arrow[d, "B"] \arrow[dl, phantom, "b"] \\
C & {} \arrow[l, "L"] \arrow[r, "R"'] & C
\end{tikzcd}$$

On a un foncteur $U_F: H_{*F} \to C^X$ associant B à μ.

***Theoreme.** Si les limites existent, l'homologie pour* $\Phi = [J; L,R]$ est donnée par

$$H_*(\Phi): X \times C^M \to C \quad \text{où} \quad H_*(\Phi)(-, F) = \lim U_F$$

La cohomologie pour Φ est définie dualement (lim remplacé par colim).

On retrouve la (co)homologie usuelle dans le cas abélien.

PUBLICATIONS DE RENE GUITART

Livres

1. *La courbure de la raison*, Les conférences du perroquet, numéro n° 31, décembre 1991, pp. 3-41, Le Perroquet, Paris, supplément au n° 87 : ISSN 0293-2431.

2. *La pulsation mathématique* (rigueur et ambiguïté, la nature de l'activité mathématique, ce dont il s'agit d'instruire), L'Harmattan, Paris, 1999.

3. *Evidence et étrangeté* (Mathématique, psychanalyse, Descartes et Freud), PUF, Paris, 2000.

Une centaine d'articles de recherche,
la plupart téléchargeables sur le site

http://rene.guitart.pagesperso-orange.fr