

# Des Esquisses aux Processus de Complexification et d'Emergence

**Andrée C. EHRESMANN\***

**(en collaboration avec Jean-Paul Vanbremeersch)**

**\*Université de Picardie Jules Verne, LAMFA**

**ehres@u-picardie.fr**

**<https://ehres.pagesperso-orange.fr>**

**<https://vbm-ehr.pagesperso-orange.fr>**

## 2 APPROCHES 'PHILOSOPHIQUES' DES CATÉGORIES

Approche 'globalisante'	Approche 'spécifique'
Fonction totale	Fonction partielle
Définition des catégories via leurs Hom	Définition par graphe avec loi de composition partielle
'Grandes' catégories. Topos	'Petites' catégories ; monoïde, ordre Groupoïdes. Théorie des univers.
Foncteurs adjoints	Constructions d'objets libres
Catégories enrichies	Catégories internes
Théories algébriques Catégories (co)complètes	Théorie des esquisses et prototypes Complétion relative. Complexification

## EXEMPLES DE CATEGORIES $p$ -STRUCTUREES

**1958 :** **Catégories 'locales'** et leurs actions. Une catégorie locale est une catégorie interne à la catégorie des 'classes locales' (= ensembles ordonnés dont toute partie non vide a une borne inférieure).

**1959:** **Catégories topologiques, catégories différentiables.** Avec application aux espaces fibrés : le groupoïde des isomorphismes entre fibres d'un espace fibré principal est un groupoïde topologique localement trivial et les espaces fibrés associés correspondent à ses actions

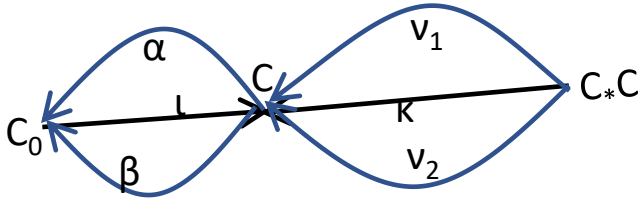
**1960:** **Catégories doubles** : catégorie des carrés commutatifs, des transformations naturelles.

**1961-62:** **Pseudogroupes** et différentes catégories ordonnées. Catégories **quasi-topologiques** ou pseudo-topologiques (AB))



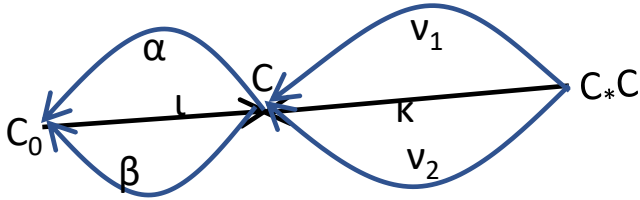
**1963:** Notion générale de **Catégorie  $p$ -Structurée** où  $p: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{Sets}$  est un foncteur 'concret'.

# CATEGORIES $p$ -STRUCTUREES



**Idée de catégorie** = graphe  $J$  où  
 $\alpha$  = application source,  $\beta$  = but  
et  $\kappa: C_*C \rightarrow C$  est la loi de  
composition de  $C_*C = \beta \vee \alpha =$   
{couples composables} vers  $C$ .

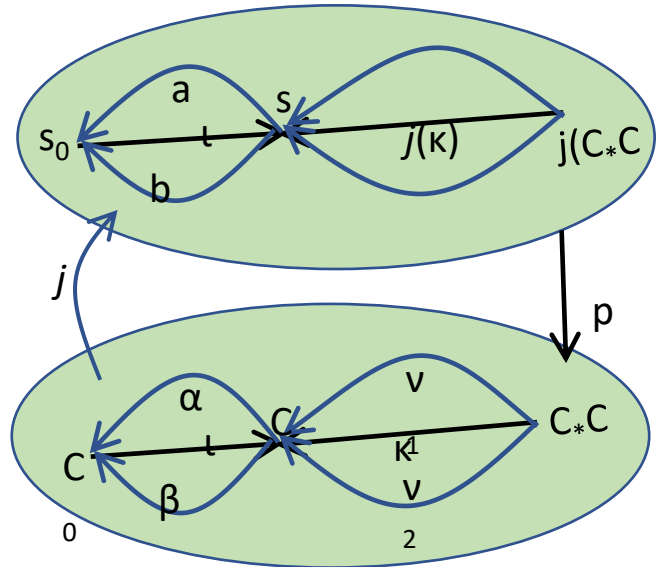
# CATEGORIES $p$ -STRUCTUREES



**Idée de catégorie** = graphe  $J$  où  
 $\alpha$  = application source,  $\beta$  = but  
 et  $\kappa: C_*C \rightarrow C$  est la loi de  
 composition de  $C_*C = \beta \vee \alpha =$   
 $\{\text{couples composables}\}$  vers  $C$ .

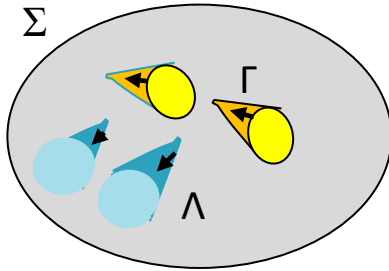
Soit donné  $p: H \rightarrow \text{Sets}$  un foncteur  
 concret. (donc il est fidèle).

**Catégorie  $p$ -structurée** =  $(C, s)$   
 où  $C$  = catégorie,  $s$  = objet de  $H$   
 tel que :  $p(s) = C$  et qu'il existe un  
 homomorphisme  $j: J \rightarrow H$  qui est  
 une section locale de  $p$  et vérifie  
 $j(C_*C) = b \vee a$  où  $b = j(\beta)$ ,  $a = j(\alpha)$



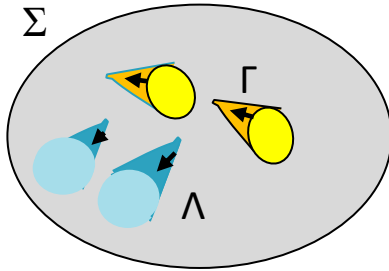
*Cf. "Synthèse sur les catégories  $p$ -structurées":  
 A. Bastiani & C. Ehresmann, Cahiers TGD 1969;  
 republié dans "Œuvres C. E" III-1.*

# ESQUISSES ET LEURS MODELES



La 1<sup>ère</sup> définition d'une esquisse (C. Ehresmann 1966 et non 1968) est la suivante :  
 $\sigma = (\Sigma, \Gamma, \Lambda)$  est une **esquisse** si  $\Sigma$  est une (néo)catégorie,  $\Gamma$  est un petit ensemble de cônes inductifs dans  $\Sigma$  et  $\Lambda$  est un petit ensemble de cônes projectifs. L'esquisse est *inductive* si  $\Lambda = \emptyset$  (resp. *projective* si  $\Gamma = \emptyset$ ).

# ESQUISSES ET LEURS MODELES



La 1<sup>ère</sup> définition d'une esquisse (C. Ehresmann 1966 et non 1968) est la suivante :

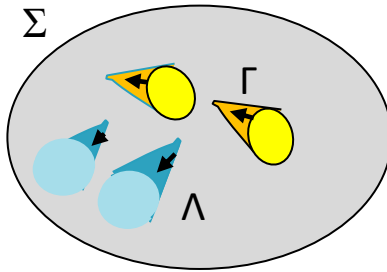
$\sigma = (\Sigma, \Gamma, \Lambda)$  est une **esquisse** si  $\Sigma$  est une (néo)catégorie,  $\Gamma$  est un petit ensemble de cônes inductifs dans  $\Sigma$  et  $\Lambda$  est un petit endemble de cônes projectifs. L'esquisse est *inductive* si  $\Lambda = \emptyset$  (resp. *projective* si  $\Gamma = \emptyset$ ).

Notons **Sk** la catégorie des (morphisms entre) esquisses. Un **morphisme**  $F: \sigma \rightarrow \sigma'$  est la donnée d'un foncteur  $F: \Sigma \rightarrow \Sigma'$  tel que :

$F(\gamma) \in \Gamma'$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et  $F(\lambda) \in \Lambda'$  pour  $\lambda \in \Lambda$ .

Elle admet pour sous-catégories pleines les catégories des esquisses inductives et des esquisses projectives

# ESQUISSES ET LEURS MODELES



La 1<sup>ère</sup> définition d'une esquisse (C. Ehresmann 1966 et non 1968) est la suivante :  
 $\sigma = (\Sigma, \Gamma, \Lambda)$  est une **esquisse** si  $\Sigma$  est une (néo)catégorie,  $\Gamma$  est un petit ensemble de cônes inductifs dans  $\Sigma$  et  $\Lambda$  est un petit endemble de cônes projectifs. L'esquisse est *inductive* si  $\Lambda = \emptyset$  (resp. *projective* si  $\Gamma = \emptyset$ ).

Notons **Sk** la catégorie des (morphisms entre) esquisses. Un **morphisme**  $F: \sigma \rightarrow \sigma'$  est la donnée d'un foncteur  $F: \Sigma \rightarrow \Sigma'$  tel que :

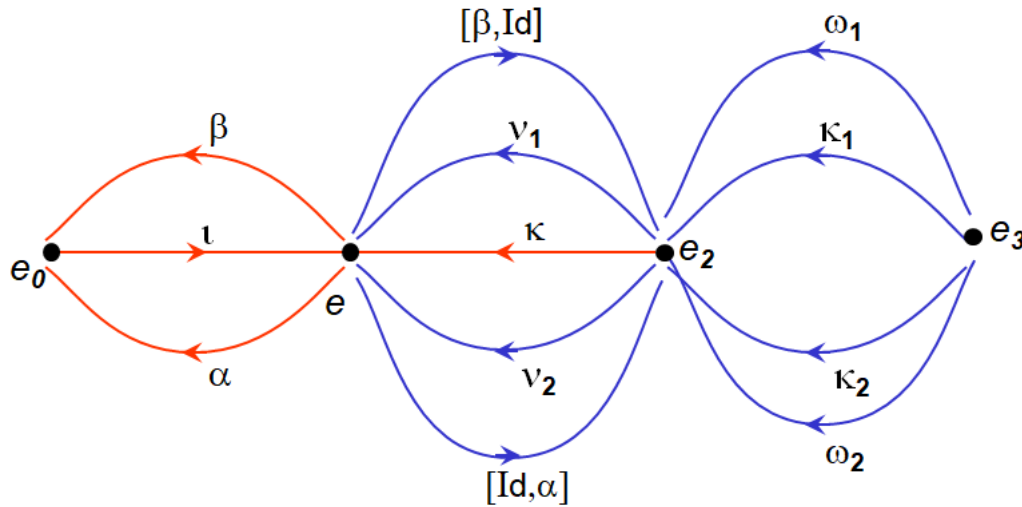
$$F(\gamma) \in \Gamma' \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma \text{ et } F(\lambda) \in \Lambda' \text{ pour } \lambda \in \Lambda.$$

Elle admet pour sous-catégories pleines les catégories des esquisses inductives et des esquisses projectives

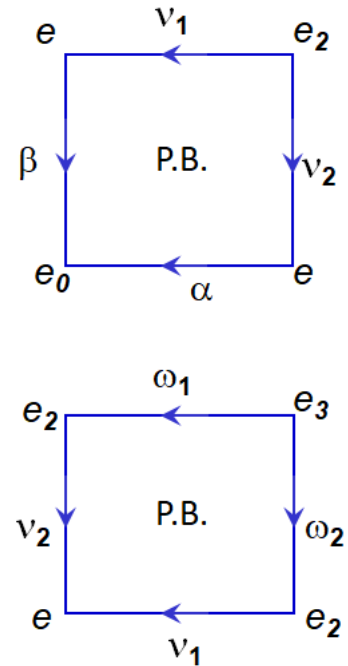
Un *modèle*  $M$  de  $\sigma$  dans une catégorie  $\mathbf{V}$  est un foncteur  $M: \Sigma \rightarrow \mathbf{V}$  transformant les cônes inductifs en cônes-colimite et les cônes projectifs en cônes-limite. La catégorie  $\mathbf{V}^\sigma$  des modèles de  $\sigma$  dans  $\mathbf{V}$  est une sous-catégorie pleine de la catégorie  $\mathbf{V}^\Sigma$  des foncteurs de  $\Sigma$  dans  $\mathbf{V}$ . Ces catégories ont été très étudiées.



# L'ESQUISSE DE CATEGORIE $\sigma_{\text{Cat}}$



Axiomes :  $\kappa_1 = [\kappa\omega_1, v_2\omega_2]$ ,  $\kappa_2 = [v_1\omega_1, \kappa\omega_2]$ ,  $\kappa\kappa_1 = \kappa\kappa_2$



Cette esquisse projective est définie sur la néocatégorie dessinée (dont l'idée de catégorie  $J$  est un sous-graphe) qui engendre la sous-catégorie pleine de  $\Delta^{\text{op}}$  ayant pour objets 0, 1, 2, 3. (où  $\Delta$  = catégorie simpliciale).

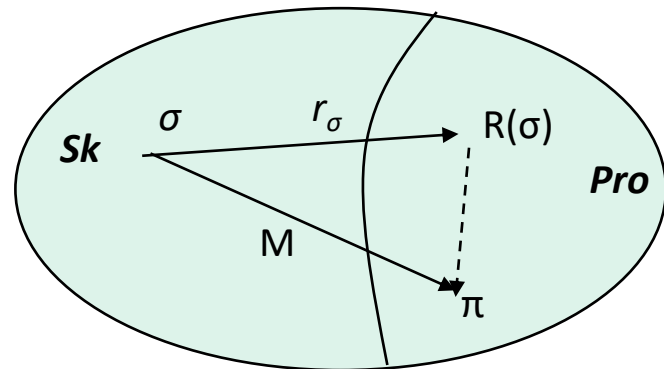
De plus  $\sigma_{\text{Cat}}$  a 2 cônes projectifs, indiqués à droite, à transformer en produits fibrés. par un modèle.

# PROTOTYPE D'UNE ESQUISSE

Un **prototype** est une esquisse dans laquelle les cônes inductifs (resp. projectifs) sont des cônes colimite (resp. des cônes limite).

Soit **Pro** la sous-catégorie pleine de la catégorie **Sk** des esquisses relative à un univers  $U$  ayant pour objets les prototypes.

**Théorème** (A. & C. Ehresmann 1, CTGDC XIII-2, 1972). *La catégorie **Pro** des prototypes est une sous-catégorie réflexive de la catégorie **Sk** des esquisses. Si le réflecteur de  $\sigma$  est  $r_\sigma: \sigma \rightarrow R(\sigma)$ , alors le foncteur  $r_\sigma$  est un 'plus petit' modèle de  $\sigma$ . Si  $\sigma$  est inductive ou projective, tel est aussi  $R(\sigma)$ .*



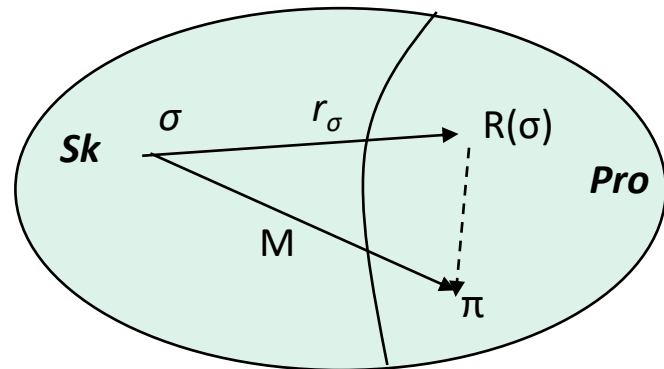
# PROTOTYPE D'UNE ESQUISSE

Un **prototype** est une esquisse dans laquelle les cônes inductifs (resp. projectifs) sont des cônes colimite (resp. des cônes limite).

Soit **Pro** la sous-catégorie pleine de la catégorie **Sk** des esquisses ayant pour objets les prototypes.

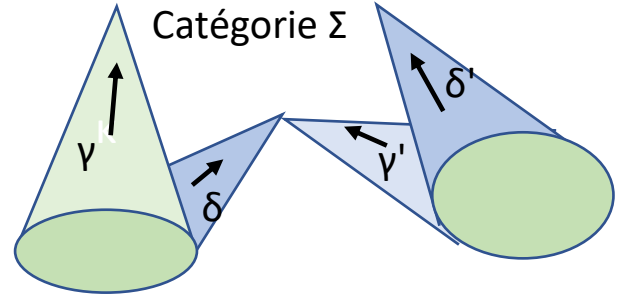
**Théorème** (A. & C. Ehresmann 1, CTGDC XIII-2, 1972). *La catégorie **Pro** des prototypes est une sous-catégorie réflexive de la catégorie **Sk** des esquisses. Si le réflecteur de  $\sigma$  est  $r_\sigma: \sigma \rightarrow R(\sigma)$ , alors le foncteur  $r_\sigma$  est un 'plus petit' modèle de  $\sigma$ . Si  $\sigma$  est inductive ou projective, tel est aussi  $R(\sigma)$ .*

Le prototype est construit par récurrence (transfinie si  $\Lambda$  ou  $\Gamma$  n'est pas fini). Les objets ne sont pas modifiés. A chaque étape on "force" les cônes distingués à devenir (co)limite par ajout des flèches manquantes et de composés, d'où une nouvelle esquisse. On continue jusqu'à obtenir un prototype



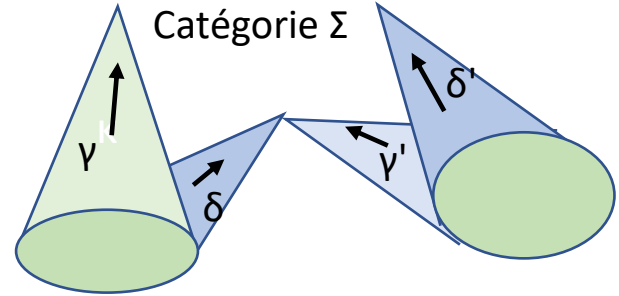
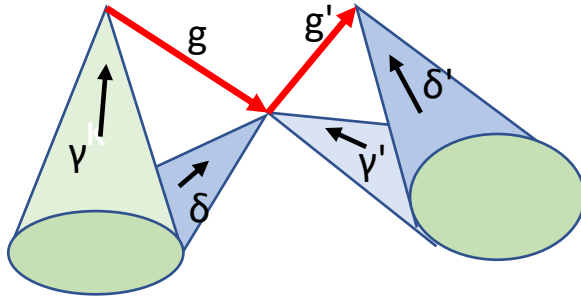
# EXEMPLE DE CONSTRUCTION D'UN PROTOTYPE

1. On part de l'esquisse inductive  $\sigma = (\Sigma, \Gamma)$  où  $\Gamma = \{\gamma, \gamma'\}$  1.



# EXEMPLE DE CONSTRUCTION D'UN PROTOTYPE

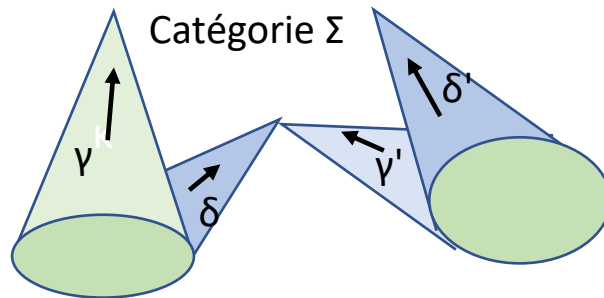
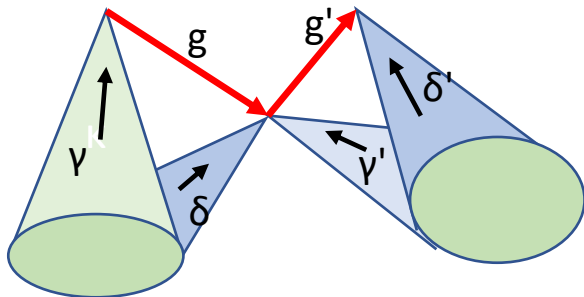
1. On part de l'esquisse inductive  
 $\sigma = (\Sigma, \Gamma)$  où  $\Gamma = \{\gamma, \gamma'\}$ 1.



2. On 'force les cônes  $\gamma$  et  $\gamma'$  à devenir colimites - en ajoutant  $g$  et  $g'$  tels que :  $g \circ \gamma = \delta$  et  $g' \circ \gamma' = \delta'$

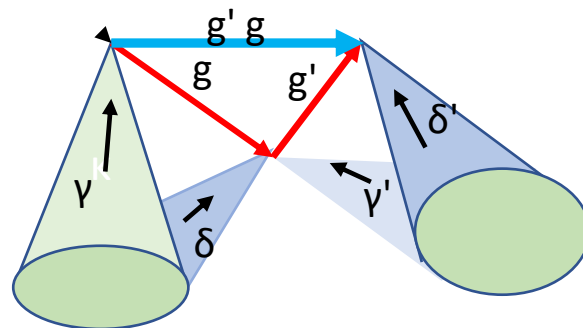
# EXEMPLE DE CONSTRUCTION D'UN PROTOTYPE

1. On part de l'esquisse inductive  $\sigma = (\Sigma, \Gamma)$  où  $\Gamma = \{\gamma, \gamma'\}$  1.



2. On 'force les cônes  $\gamma$  et  $\gamma'$  à devenir colimites - en ajoutant  $g$  et  $g'$  tels que :  $g \circ \gamma = \delta$  et  $g' \circ \gamma' = \delta'$

3. On ajoute le composé  $g' \circ g$  pour avoir une catégorie  $\Sigma'$ . Ici  $\Sigma'$  est le support du prototype. Sinon il faudrait recommencer la construction à partir de  $C'$ .



# Di-Esquisses

## Cocomplétion et Complexification

# (CO-)COMPLETION ET COMPLEXIFICATION

La construction du prototype d'une esquisse conduit à une catégorie ayant les mêmes objets mais dans laquelle certains cônes sont forcés de devenir limite ou colimite tout en conservant leur sommet. Ce prototype est défini à isomorphisme près.

Etant donné une catégorie  $C$  et un ensemble  $\mathbf{D}$  de diagrammes  $D$  dans  $C$ , le problème 'universel' (à isomorphisme à ou équivalence près) de la  $\mathbf{D}$ -*(co-)complétion* de  $C$  consiste à 'étendre'  $C$  en une catégorie  $K$  par ajout de (co)limites (dans  $K$ ) aux diagrammes de  $\mathbf{D}$ . On parle alors de

- $\mathbf{D}$ -*(co-)complétion libre* si le processus ne conserve pas toutes les (co-)limites existant dans  $C$ .

- $\delta$ -*Complexification* de  $C$  si on veut ajouter des (co)limites aux diagrammes de  $\mathbf{D}$  sans (co)limite dans  $C$ , et ceci tout en conservant certains cônes (co-)limites  $\gamma$  existant dans  $C$ .

**Exemples** : 1. 'Améliorer' une catégorie, par exemple la catégorie  $\langle \text{diff} \rangle$ .

2. Modéliser la dynamique d'un système évolutif 'naturel' par formation d'objets de complexité croissante.



# DI-ESQUISSE - COMPLEXIFICATION

La notion de di-esquisse généralise celle d'esquisse inductive.

**Définition.** Une *di-esquisse*  $\delta = (C, \mathbf{D}, \Gamma)$  consiste en :

- (i) Une catégorie  $C$ .
- (ii) Un ensemble  $\mathbf{D}$  de diagrammes  $D$  de  $C$
- (ii) Un ensemble  $\Gamma$  de cônes inductifs de  $C$ .

Un *morphisme*  $F: \delta \rightarrow \delta'$  est un foncteur  $F: C \rightarrow C'$  vérifiant :

- (i) pour  $D \in \mathbf{D}$ , on a  $F\alpha D \in \mathbf{D}'$  ou  $F\alpha D$  est base d'un cône  $\gamma' \in \Gamma'$  ;
- (ii) pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , le cône  $F(\gamma)$  est dans  $\Gamma'$ .

# DI-ESQUISSE - COMPLEXIFICATION

La notion de di-esquisse généralise celle d'esquisse inductive.

**Définition.** Une *di-esquisse*  $\delta = (C, \mathbf{D}, \Gamma)$  consiste en :

- (i) Une catégorie  $C$ .
- (ii) Un ensemble  $\mathbf{D}$  de diagrammes  $D$  de  $C$
- (ii) Un ensemble  $\Gamma$  de cônes inductifs de  $C$ .

Un *morphisme*  $F: \delta \rightarrow \delta'$  est un foncteur  $F: C \rightarrow C'$  vérifiant :

- (i) pour  $D \in \mathbf{D}$ , on a  $F \times D \in \mathbf{D}'$  ou  $F \times D$  est base d'un cône  $\gamma' \in \Gamma'$  ;
- (ii) pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , le cône  $F \gamma$  est dans  $\Gamma'$ .

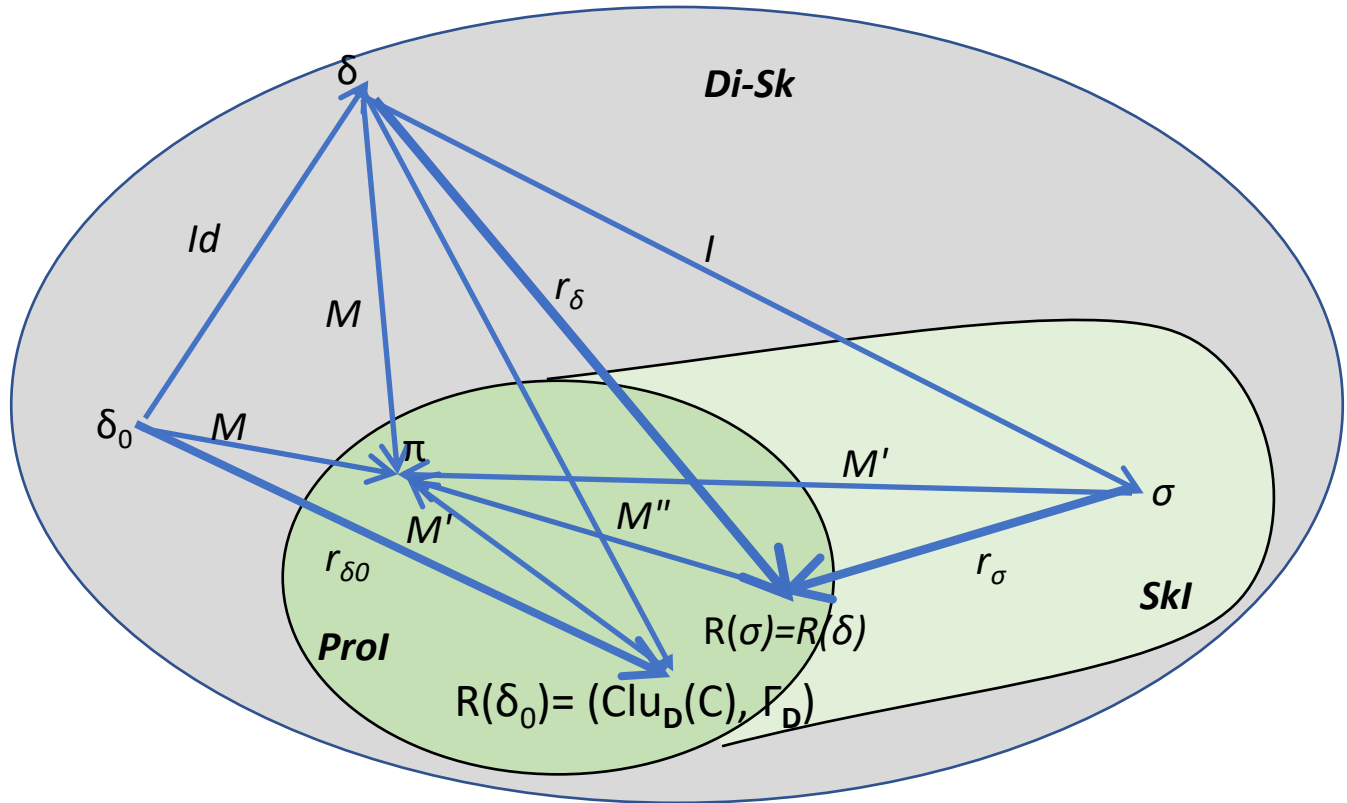
On note ***Di-Sk*** la catégorie des di-esquisses relative à un univers  $U$ . La catégorie ***SkI*** des esquisses inductives et sa sous-catégorie ***ProI*** des prototypes inductifs sont identifiées à des sous-catégories de ***Di-Sk*** en identifiant l'esquisse inductive  $(C, \Gamma)$  à la di-esquisse  $(C, \emptyset, \Gamma)$ .

**Théorème de Complexification.** La sous-catégorie ***ProI*** des prototypes est une sous-catégorie réflexive de ***Di-Sk***. Si  $r_\delta: \delta \rightarrow R(\delta) = (K, \Pi)$  est le réflecteur de  $\delta$  dans ***ProI***, on appelle  $R(\delta)$  le **prototype** de  $\delta$  et  $K$  la  **$\delta$ -complexification** de  $C$

# PROTOTYPE D'UNE DI-ESQUISSE $\delta = (C, \mathbf{D}, \Gamma)$

**Modèle d'une di-esquisse  $\delta$  dans  $V$  :** C'est un foncteur  $M: C \rightarrow V$  tel que :

- (i) MD, pour chaque  $D \in \mathbf{D}$ , acquière une colimite  $D^*$  dans  $V$  ;
- (ii) pour tout  $\gamma \in \Gamma$  l'image par  $M$  du cône  $\gamma$  est un cône colimite dans  $V$ .



# COCOMPLETION LIBRE POUR PETITS DIAGRAMMES

Soit  $C$  une catégorie localement petite. On sait que la catégorie des préfaisceaux sur  $C$  est une co-complétion libre de  $C$ , à équivalence près.

Dans le cas filtrant, la catégorie  $\text{Ind}(C)$  des ind-objets dans  $C$  (définie par Grothendieck, 1962) est une co-complétion libre, à isomorphisme près, relativement aux diagrammes filtrants. Cette catégorie a pour objets les petits diagrammes filtrants  $P: sP \rightarrow C$  et  $\text{Hom}_{\text{Ind}}(Q, P)$  est donné par la formule :

$$\text{Ind}(Q, P) = \text{Lim}_{k \in sQ} \text{Colim}_{i \in sP} (\text{Hom}(Q(k), P(i))).$$

Plusieurs auteurs ont essayé de généraliser ceci au cas de tous les petits diagrammes, mais ont eu des problèmes pour définir la composition.

Nous avons réussi à étendre cette formule à l'aide d'une présentation d'un morphisme sous la forme d'un 'cluster' (A. Ehresmann & Vanbreemsch, 1987). D'où la catégorie des clusters que nous allons utiliser pour obtenir des **D**-cocomplétions libres à isomorphismes près.

# COMMA-CATEGORIE ET SES CC

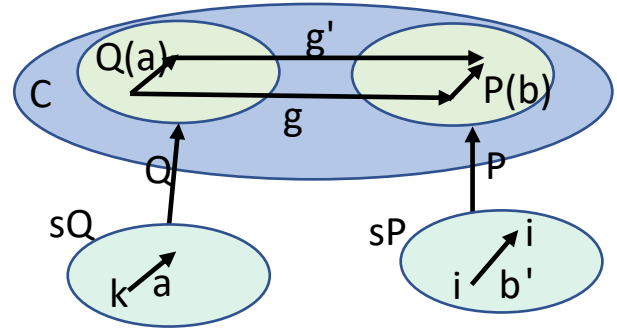
Soit  $C$  une catégorie,  $P: sP \rightarrow C$  et  $Q: sQ \rightarrow C$  des petits diagrammes.

**Catégorie-comma**  $Q|P$ : objet =  $(k, g, i)$   
où  $k \in sQ$ ,  $i \in sP$  et  $g: Q(k) \rightarrow P(i)$  dans  $C$ .

Un morphisme de  $Q|P$  est de la forme

$$(a, b) : (k, g, i) \rightarrow (k', g', i')$$

où  $a \in sQ$ ,  $b \in sP$  et  $g'Q(a) = P(b)g$



# COMMA-CATEGORIE ET SES CC

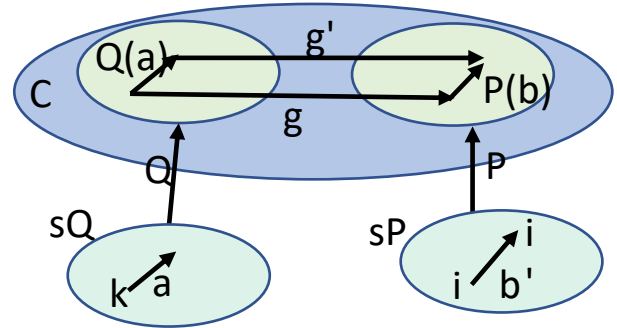
Soit  $C$  une catégorie,  $P: sP \rightarrow C$  et  $Q: sQ \rightarrow C$  des petits diagrammes.

**Catégorie-comma**  $Q|P$ : objet =  $(k, g, i)$   
où  $k \in sQ$ ,  $i \in sP$  et  $g: Q(k) \rightarrow P(i)$  dans  $C$ .

Un morphisme de  $Q|P$  est de la forme

$$(a, b) : (k, g, i) \rightarrow (k', g', i')$$

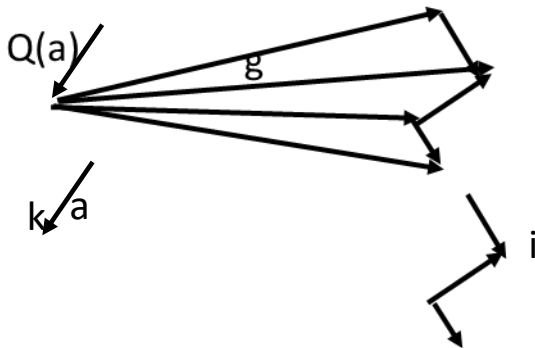
où  $a \in sQ$ ,  $b \in sP$  et  $g'Q(a) = P(b)g$



**Calcul d'un élément de  $\text{Ind}(Q, P) = \text{Lim}_{k \in sQ} \text{Colim}_{i \in sP} (\text{Hom}(Q(k), P(i)))$ .**

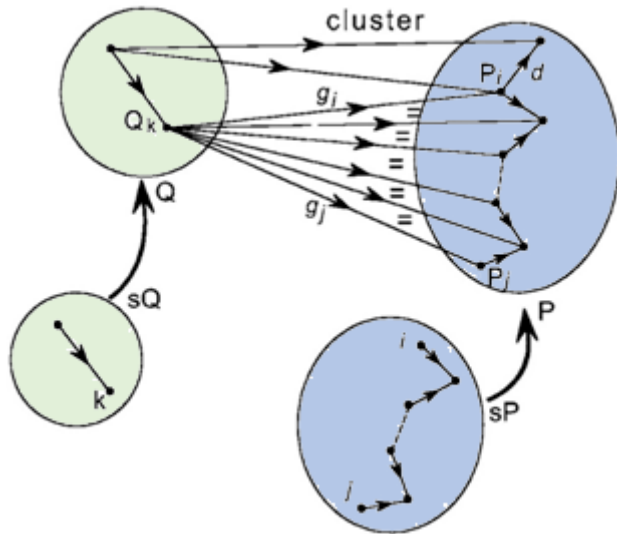
Pour un objet  $k$  de  $sQ$ , l'ensemble  $\text{Colim}_{i \in sP} (\text{Hom}(Q(k), P(i)))$  est le quotient de la somme  $S_k = \{(k, g, i) \in Q|P\}$  par la relation d'équivalence qu'engendre

$$(k, g, i) \sim (k, P(b)g, i') \text{ où } b: i \rightarrow i' \text{ dans } sP.$$



Ce quotient est la composante connexe de  $(k, g, i)$  dans  $Q/k|P$  où  $Q/k =$  restriction de  $Q$  à  $\{k\}$ . Et un élément de  $\text{Ind}(Q, P)$  est une famille de telles composantes connexes se déduisant entre elles par composé avec  $Q(a)$ .

# LA NOTION DE CLUSTER



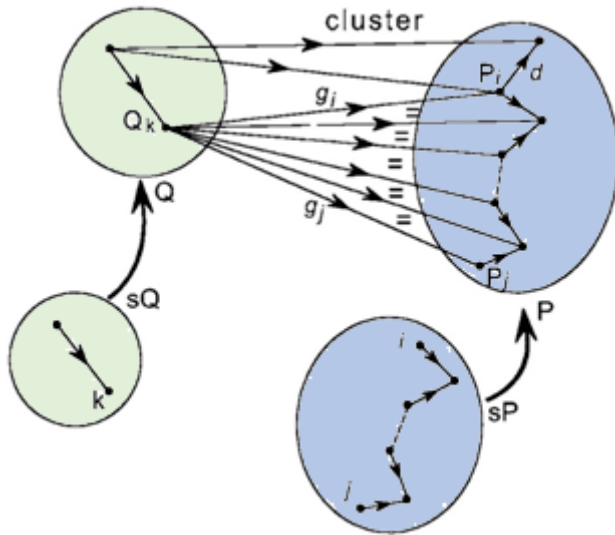
Un **cluster** (aussi appelé **gerbe**) de  $Q$  vers  $P$  est un ensemble maximal  $G$  d'objets de  $Q|P$  tel que :

(i) Pour tout objet  $k$  de  $sQ$  il existe au moins  $(k, g_i, i) \in G$ , et s'il y en a d'autres ils sont liés par un zigzag dans  $Q/k|P$

(ii) Pour  $a: k' \rightarrow k$  dans  $sQ$ , on a  $(k', g_i Q(a), i) \in G$  pour  $(k, g_i, i) \in G$

→  $G$  définit un préfaisceau sur  $sQ$  associant à tout  $k \in sQ$  une composante connexe de  $(Q/k|P)$ .

# LA NOTION DE CLUSTER



Un **cluster** (aussi appelé **gerbe**) de  $Q$  vers  $P$  est un ensemble maximal  $G$  d'objets de  $Q|P$  tel que :

(i) Pour tout objet  $k$  de  $sQ$  il existe au moins un  $(k, g_i, i) \in G$  et s'il y en a d'autres ils sont liés par un zigzag dans  $Q/_k|P$

(ii) Pour  $a: k' \rightarrow k$  dans  $sQ$ , on a  $(k', g_i Q(a), i) \in G$  pour  $(k, g_i, i) \in G$

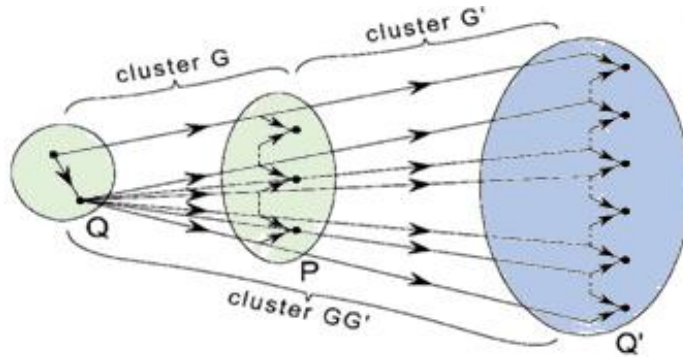
→  $G$  définit un préfaisceau sur  $sQ$  associant à tout  $k \in sQ$  une composante connexe de  $(Q/_k|P)$ .

Cette définition a été initialement introduite en 1981 par A. Ehresmann dans le Commentaire 199.1 de "Charles Ehresmann ; Œuvres complètes et Commentées" (Partie IV-1), dans le cas 'dual' où elle est appelée 'atlas'. Puis reprise et développée dans Ehresmann & Vanbremeersch 1987.

*Exemples de clusters* : 1. Tout morphisme  $g: Q(k) \rightarrow P(i)$  de  $C$  s'identifie au cluster  $\{(k, g_i, i)\}$  du foncteur  $Q/_k$  vers  $P/_i: \{i\} \rightarrow P(i)$ . 2. Un cône inductif dans  $C$  de base  $Q$  et sommet  $P(i)$  s'identifie à un cluster de  $Q$  vers  $P/_i$ .

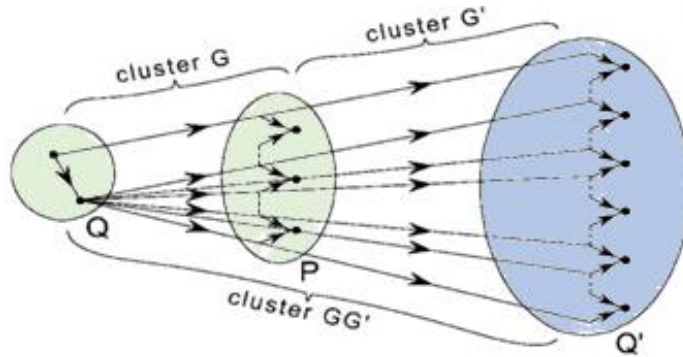


# LA CATEGORIE DES CLUSTERS $\text{Clu}(C)$



On définit la catégorie  $\text{Clu}(C)$  : Les objets sont les petits diagrammes dans  $C$  et un morphisme  $G: Q \rightarrow P$  est un cluster. Le composé  $G' \circ G: Q \rightarrow Q'$  de  $G: Q \rightarrow P$  avec  $G': P \rightarrow Q'$  est le cluster engendré par l'ensemble  $G'G$  des composés des éléments de  $G$  et  $G'$ .

# LA CATEGORIE DES CLUSTERS $\text{Clu}(C)$



On définit la catégorie  $\text{Clu}(C)$  : Les objets sont les petits diagrammes dans  $C$  et un morphisme  $G: Q \rightarrow P$  est un cluster. Le composé  $G' \circ G$  de  $G: Q \rightarrow P$  avec  $G': P \rightarrow Q'$  est le cluster engendré par l'ensemble  $G'G$  des composés des éléments de  $G$  et  $G'$ .

On a un foncteur injectif  $I: C \rightarrow \text{Clu}(C)$  qui associe au morphisme  $h: c \rightarrow c'$  de  $C$  le cluster réduit à  $(c, h, c')$ :  $\{c\}^\wedge \rightarrow \{c'\}^\wedge$ , où  $\{c\}^\wedge$  désigne le foncteur de  $\{c\}$  vers  $C$  constant sur  $c$ . Pour simplifier les notations, on identifie la sous-catégorie  $I(C)$  à  $C$ . Pour éviter des confusions, lorsque  $Q: sQ \rightarrow C$  est considéré comme objet de  $\text{Clu}(C)$ , on le notera  $Q^*$ .

## LES D-CLUSTERS POUR PROTOTYPE DE $\delta_0 = (C, \mathbf{D}, \emptyset)$

Soit  $\mathbf{D}$  un ensemble de diagrammes  $D: sD \rightarrow C$ . On note  $\text{Clu}_{\mathbf{D}}(C)$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Clu}(C)$  ayant pour objets ceux de  $C$  et les  $D^*$  où  $D \in \mathbf{D}$ . On a  $\text{Clu}_{\mathbf{D}}(C) = \text{Clu}(C)$  si  $\mathbf{D}$  est l'ensemble des petits diagrammes dans  $C$ .

- Théorème.** 1.  $\text{Clu}_{\mathbf{D}}(C)$  est une catégorie  $\mathbf{D}$ -cocomplète : tout diagramme  $D \in \mathbf{D}$  admet  $D^*$  pour colimite ; le cône-colimite, noté  $\gamma_D$ , associe à  $k \in sD$  le cluster  $\{D(k)\}^\wedge \rightarrow D$  engendré par  $\{D(k)\}$ . Soit  $\Gamma_{\mathbf{D}} = \{\gamma_D \mid D \in \mathbf{D}\}$
2. La di-esquisse  $\delta_0 = (C, \mathbf{D}, \emptyset)$  admet pour prototype  $(\text{Clu}_{\mathbf{D}}(C), \Gamma_{\mathbf{D}})$ .
  3.  $\text{Clu}_{\mathbf{D}}(C)$  est la  $\mathbf{D}$ -cocomplétion libre (à isomorphisme près) de  $C$

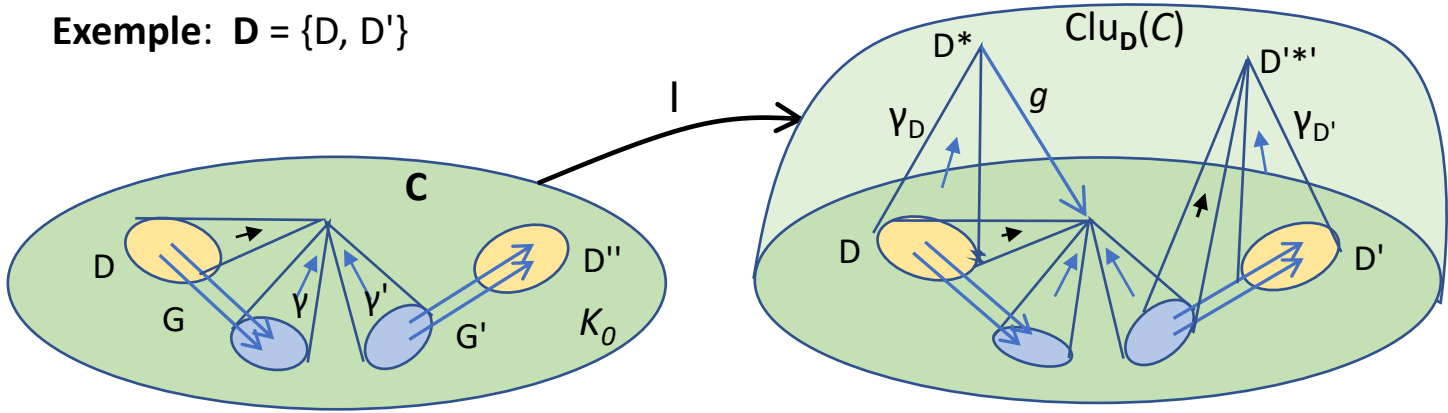
# LES D-CLUSTERS POUR PROTOTYPE DE $\delta_0 = (C, D, \emptyset)$

Soit  $\mathbf{D}$  un ensemble de diagrammes  $D: sD \rightarrow C$ . On note  $\text{Clu}_{\mathbf{D}}(C)$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Clu}(C)$  ayant pour objets ceux de  $C$  et les  $D^*$  où  $D \in \mathbf{D}$ . On a  $\text{Clu}_{\mathbf{D}}(C) = \text{Clu}(C)$  si  $\mathbf{D}$  est l'ensemble des petits diagrammes dans  $C$ .

**Théorème. 1.**  $\text{Clu}_{\mathbf{D}}(C)$  est une catégorie  $\mathbf{D}$ -cocomplète : tout diagramme  $D \in \mathbf{D}$  admet  $D^*$  pour colimite ; le cône-colimite, noté  $\gamma_D$ , associe à  $k \in sD$  le cluster  $\{D(k)\}^\wedge \rightarrow D$  engendré par  $\{D(k)\}$ . Soit  $\Gamma_{\mathbf{D}} = \{\gamma_D \mid D \in \mathbf{D}\}$

2. La di-esquisse  $\delta_0 = (C, \mathbf{D}, \emptyset)$  admet pour prototype  $(\text{Clu}_{\mathbf{D}}(C), \Gamma_{\mathbf{D}})$ .
3.  $\text{Clu}_{\mathbf{D}}(C)$  est la  $\mathbf{D}$ -cocomplétion libre (à isomorphisme près) de  $C$

**Exemple:**  $\mathbf{D} = \{D, D'\}$



## $\delta$ -COMPLEXIFICATION DE C

**Théorème.** Soit  $r_\delta: \delta \rightarrow R(\delta)$  le réflecteur de la di-esquisse  $\delta = (C, \mathbf{D}, \Gamma)$  dans **Prot**. Le prototype  $R(\delta) = (K, \Pi)$  est obtenu comme étant le prototype  $R(\sigma)$  de l'esquisse  $\sigma = (\text{Clu}_D(C), \Gamma_D \cup \Gamma)$ . En particulier la  $\delta$ -complexification  $K$  a les mêmes objets que  $\text{Clu}_D(\mathbf{C})$ . Et  $r_\delta$  est un 'plus petit modèle' de  $\delta$ .

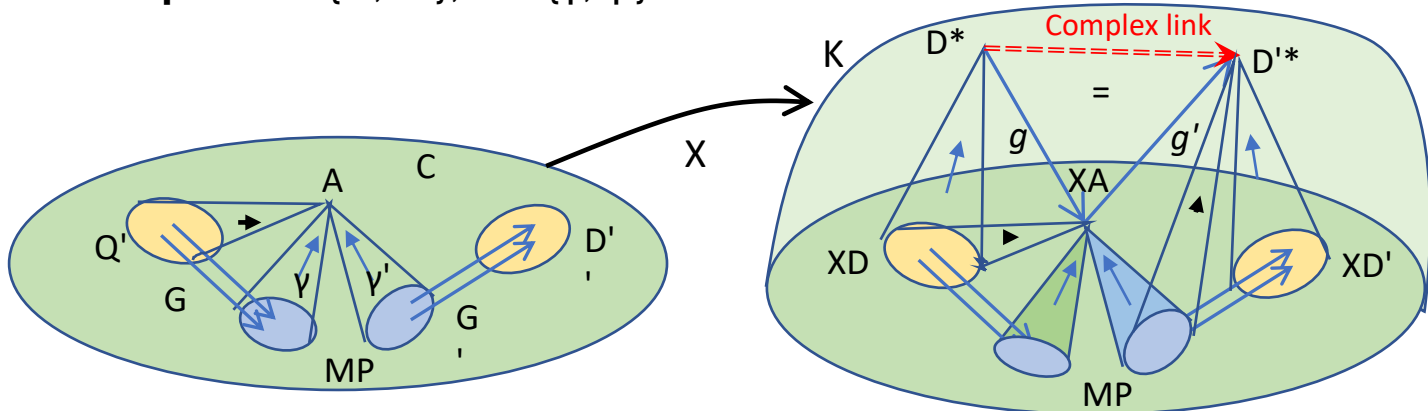
Une construction explicite d'une complexification de  $C$  (par récurrence) est donnée dans [Ehresmann & VanbremeerschV, 1987].

# $\delta$ -COMPLEXIFICATION DE C

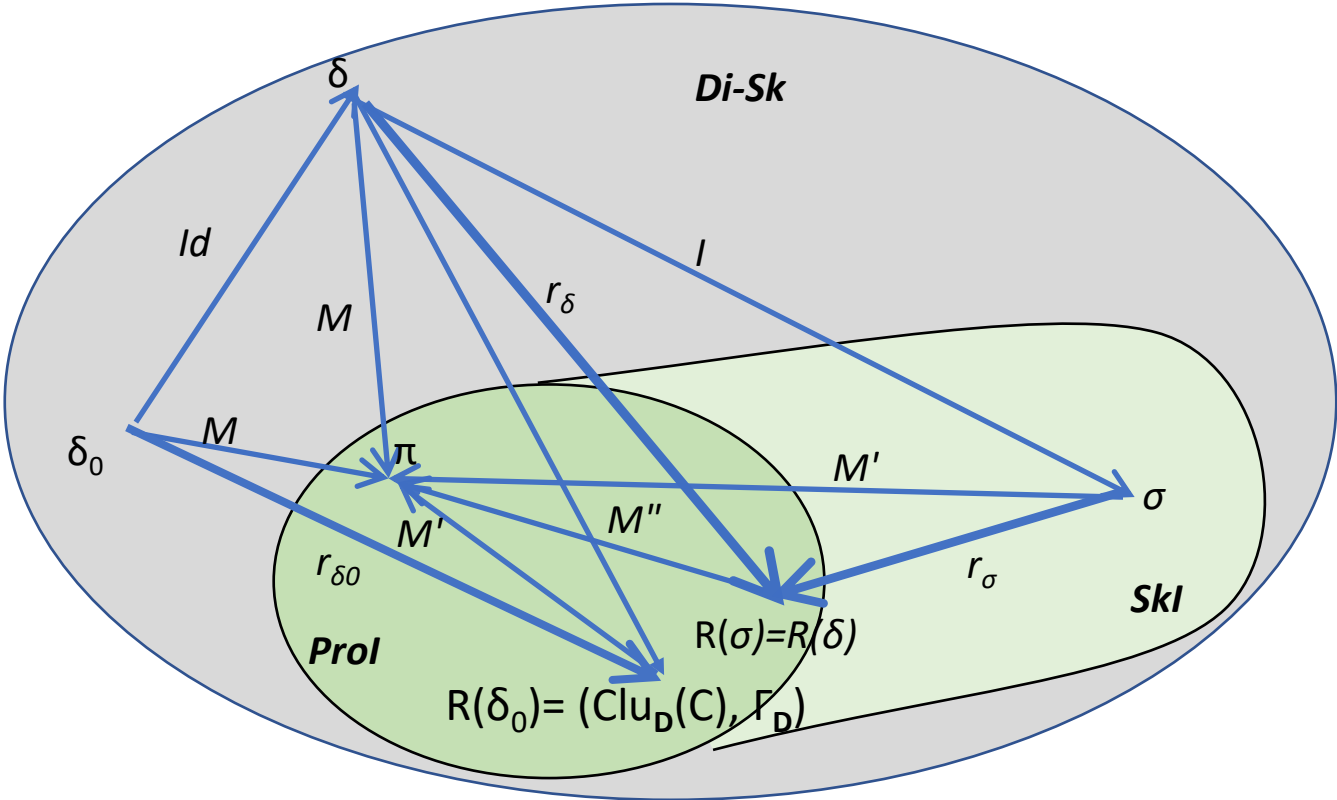
**Théorème.** Soit  $r_\delta: \delta \rightarrow R(\delta)$  le réflecteur de la di-esquisse  $\delta = (C, \mathbf{D}, \Gamma)$  dans **Pri**. Le prototype  $R(\delta) = (K, \Pi)$  est obtenu comme étant le prototype  $R(\sigma)$  de l'esquisse  $\sigma = (\text{Clu}_D(C), \Gamma_D \cup \Gamma)$ . En particulier la  $\delta$ -complexification  $K$  a les mêmes objets que  $\text{Clu}_D(\mathbf{C})$ . Et  $r_\delta$  est un 'plus petit modèle' de  $\delta$ .

Une construction explicite d'une complexification de  $C$  (par récurrence) est donnée dans [Ehresmann & VanbreemschV, 1987].

**Exemple.**  $\mathbf{D} = \{D, D'\}$ ,  $\Gamma = \{\gamma, \gamma'\}$



# SCHEMA D'ENSEMBLE

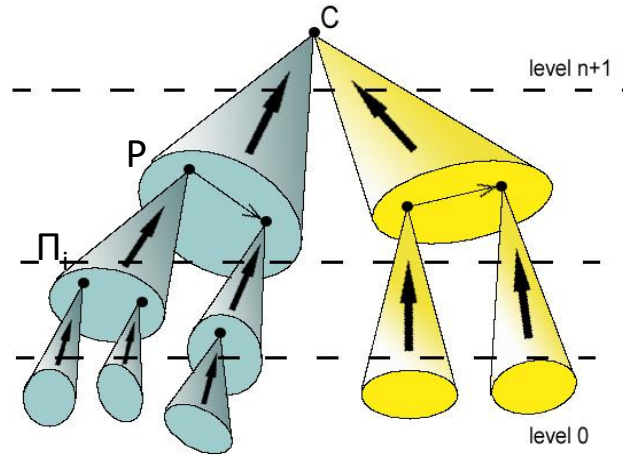


Application à la construction de hiérarchies.  
Problèmes d'émergence



# CATEGORIE HIERARCHIQUE

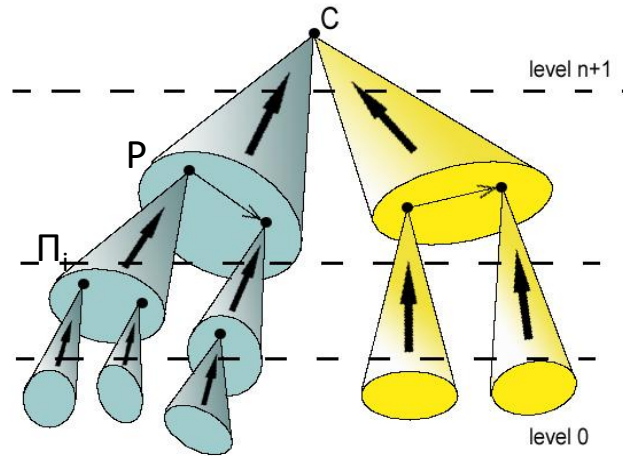
**Definition.** Une catégorie  $H$  est dite **hiérarchique** si l'on s'est donné une répartition des objets de  $H$  en différents *niveaux de complexité* (de 0 à  $m$ ) de sorte qu'un objet  $C$  de niveau  $n+1$  soit la colimite d'au moins un diagramme  $P$  (dont les objets  $P_i$  sont) de niveaux  $\leq n$ .



Il s'ensuit que chaque objet  $C$  de  $H$  admet au moins une *ramification jusqu'au niveau 0* obtenue en prenant un tel diagramme  $P$ , puis, pour chaque  $P_i$  de  $P$ , un diagramme  $\Pi_i$  de niveaux inférieurs ayant  $P_i$  pour colimite, et ainsi de suite jusqu'à des diagrammes de niveaux 0 qui forment la *base de la ramification*.

# CATEGORIE HIERARCHIQUE

**Definition.** Une catégorie  $H$  est dite **hiérarchique** si l'on s'est donné une répartition des objets de  $H$  en différents *niveaux de complexité* (de 0 à  $m$ ) de sorte qu'un objet  $C$  de niveau  $n+1$  soit la colimite d'au moins un diagramme  $P$  (dont les objets  $P_i$  sont) de niveaux  $\leq n$ .



Il s'ensuit que chaque objet  $C$  de  $H$  admet au moins une *ramification jusqu'au niveau 0* obtenue en prenant un tel diagramme  $P$ , puis, pour chaque  $P_i$  de  $P$ , un diagramme  $\Pi_i$  de niveaux inférieurs ayant  $P_i$  pour colimite, et ainsi de suite jusqu'à des diagrammes de niveaux 0 qui forment la *base de la ramification*.

**Définition.** Dans une catégorie hiérarchique  $H$  l'**ordre de complexité** d'un objet  $C$  est la plus petite longueur d'une ramification de  $C$ . jusqu'au niveau 0.

(Cf. *complexité de Kolmogorov-Chaitin* d'une chaîne = plus petite longueur d'un programme.)

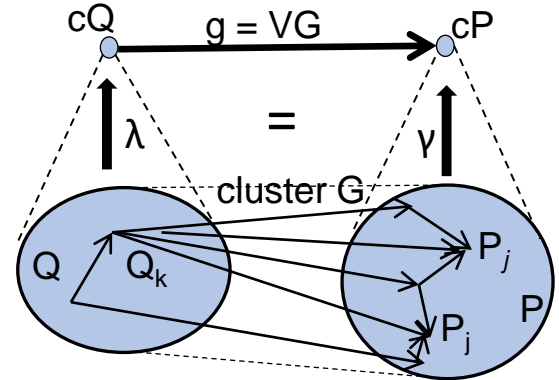


# LIENS n-SIMPLES. CAS DU REDUCTIONISME

**Proposition.** Soit  $Q$  et  $P$  2 diagrammes dans  $H$  qui admettant des colimites, Soit  $\gamma: P \rightarrow cP$  et  $\lambda: Q \rightarrow cQ$  des cônes-colimite. Si  $G$  est un cluster de  $Q$  vers  $P$ , il existe un unique morphisme  $g: cQ \rightarrow cP$ , noté  $VG$ , tel que l'on ait  $g\lambda = \gamma G$ .

**Définition.**  $VG$  est appelé **lien  $(Q, P)$ -simple recollement de  $G$** . Si les objets de  $P$  et  $Q$  sont de niveaux  $\leq n$ , on appelle  $VG$  un **lien n-simple**.

Un composé de liens n-simples recollant des clusters adjacents est encore un lien n-simple.



# LIENS n-SIMPLES. CAS DU REDUCTIONISME

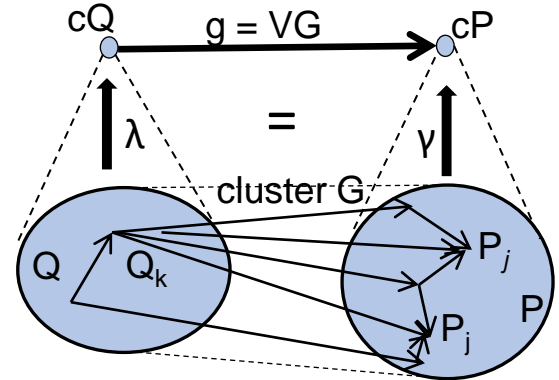
**Proposition.** Soit  $Q$  et  $P$  2 diagrammes dans  $H$  qui admettant des colimites, Soit  $\gamma: P \rightarrow cP$  et  $\lambda: Q \rightarrow cQ$  des cônes-colimite. Si  $G$  est un cluster de  $Q$  vers  $P$ , il existe un unique morphisme  $g: cQ \rightarrow cP$ , noté  $VG$ , tel que l'on ait  $g \circ \lambda = \gamma \circ G$ .

**Définition.**  $VG$  est appelé **lien  $(Q, P)$ -simple recollement de  $G$** . Si les objets de  $P$  et  $Q$  sont de niveaux  $\leq n$ , on appelle  $VG$  un **lien n-simple**.

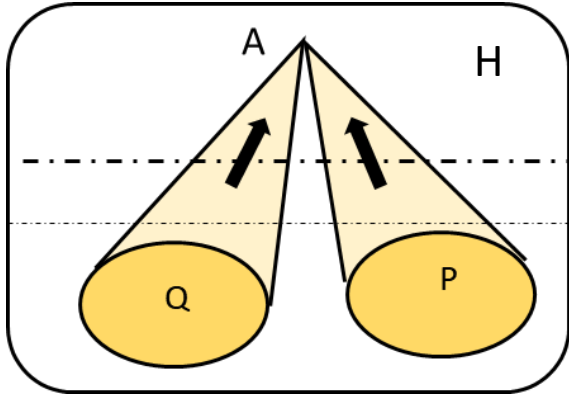
Un composé de liens n-simples recollant des clusters adjacents est encore un lien n-simple.

**Définition:** On dit que la **hiérarchie de  $H$  est réductible** si tout objet de  $H$  est d'ordre de complexité 0 ou 1 et si tout morphisme  $g: A \rightarrow B$  est 0-simple.

Nous allons donner une condition pour qu'il n'en soit pas ainsi, à savoir le Principe de Multiplicité..

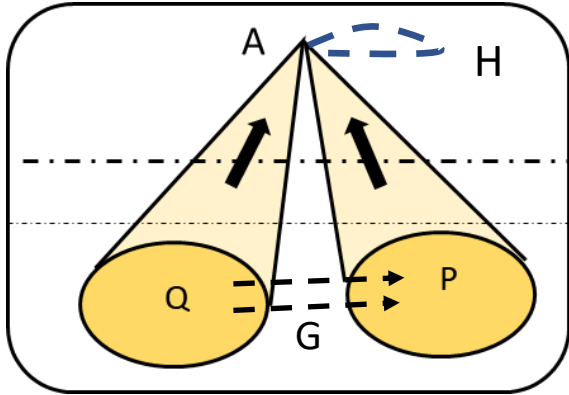


# PRINCIPE DE MULTIPLICITE (MP)



**Définition.** Des diagrammes Q et P de H satisfont le **Principe de Multiplicité (MP)** s'ils ont la même colimite et qu'il n'existe pas de cluster G entre eux tel que  $VG$  soit un isomorphisme.

# PRINCIPE DE MULTIPLICITE (MP)

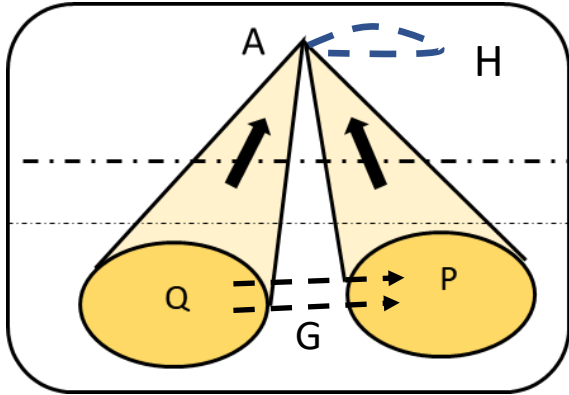


**Définition.** Des diagrammes Q et P de H satisfont le **Principe de Multiplicité (MP)** s'ils ont la même colimite et qu'il n'existe pas de cluster G entre eux tel que  $VG$  soit un isomorphisme.

Autrement dit, si (i) il n'y a pas de cluster entre eux ou (ii) il existe un cluster G entre eux mais  $VG \neq \text{iso}$ .

*Remarque.* Cette notion modélise la propriété de "degeneracy" des systèmes biologiques (introduite par Edelman, 1989).

# PRINCIPE DE MULTIPLICITE (MP)



**Définition.** Des diagrammes Q et P de H satisfont le **Principe de Multiplicité (MP)** s'ils ont la même colimite et qu'il n'existe pas de cluster G entre eux tel que  $VG$  soit un isomorphisme.

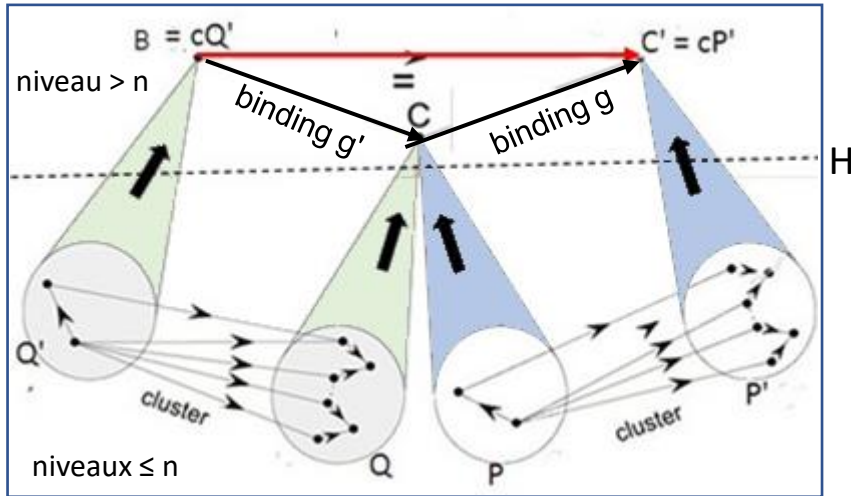
Autrement dit, si (i) il n'y a pas de cluster entre eux ou (ii) il existe un cluster G entre eux mais  $VG \neq \text{iso}$ .

*Remarque.* Cette notion modélise la propriété de "degeneracy" des systèmes biologiques (introduite par Edelman, 1989).

**Définition.** Un objet A de H est dit **multifacettes** s'il est colimite de 2 patterns P et Q vérifiant MP.

L'existence d'objets multifacettes dans une catégorie hiérarchique permet l'existence d'objets d'ordre de complexité  $> 1$  et conduit à divers phénomènes d'émergence que nous allons étudier.

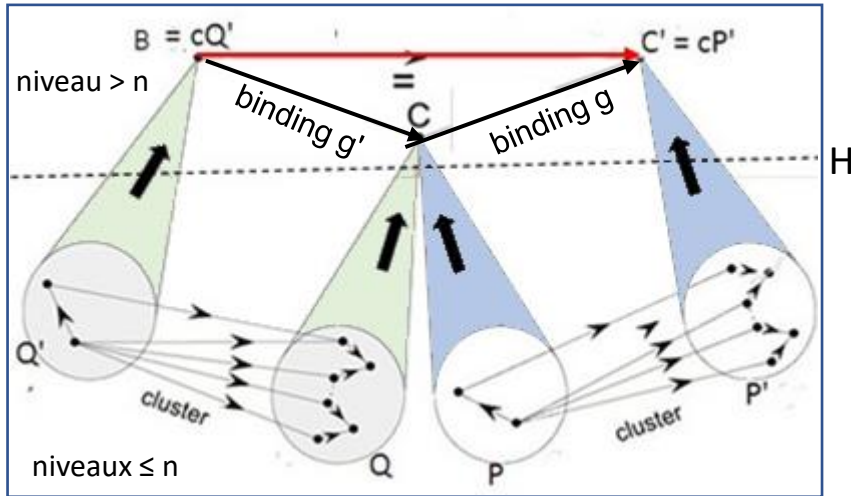
# MP => EMERGENCE DE LIENS COMPLEXES



Si  $P$  et  $Q$  satisfont MP, les morphismes  $g$  et  $g'$  recollant des clusters non adjacents doivent avoir un compose  $gg'$ :  $B \rightarrow C'$ . Ce morphisme est dit **lien  $n$ -complexe** si  $g$  et  $g'$  sont des liens  $n$ -simples.



# MP => EMERGENCE DE LIENS COMPLEXES

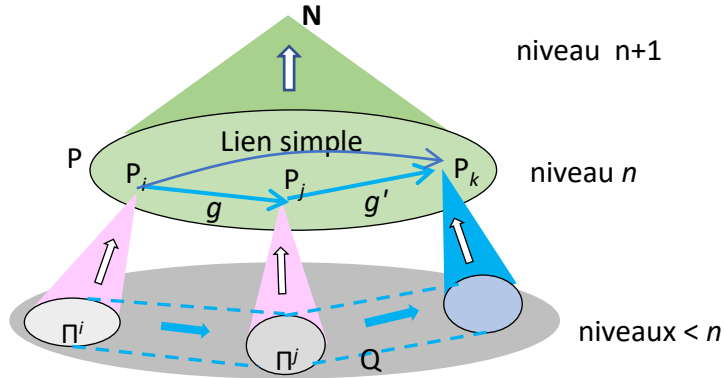


Si  $P$  et  $Q$  satisfont  $MP$ , les morphismes  $g$  et  $g'$  recollant des clusters non adjacents doivent avoir un compose  $g g'$ :  $B \rightarrow C'$ . Ce morphisme est dit **lien n-complexe** si  $g$  et  $g'$  sont des liens  $n$ -simples.

Ce morphisme  $g g'$ :  $B \rightarrow C'$  'emerge' dans  $H$  bien qu'il ne soit pas 'physiquement' observable via des morphismes reliant les composants de  $Q'$  et  $P'$ . En fait, il depend de la structure 'globale' des niveaux infrieures qui impose que  $Q$  et  $P$  aient la même colimite.

De tels phénomènes apparaissent en particulier dans les *hiérarchies basées* dont les différents niveaux de complexité s'obtiennent à partir des niveaux inférieurs par un processus de *complexification*...

# OBJET REDUCTIBLE

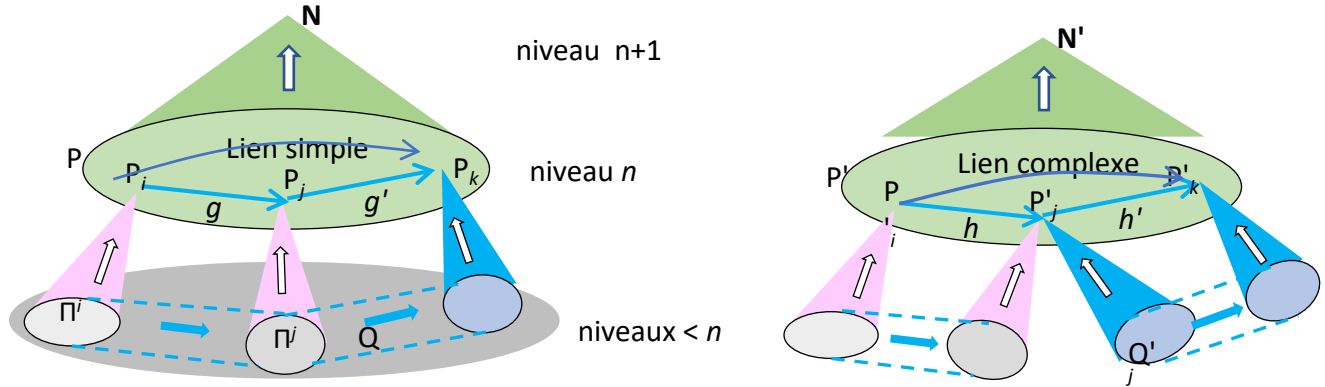


Un objet  $N$  de  $H$  est  $m$ -réductible s'il est colimite d'un diagramme dont les objets sont de niveau  $\leq m$ . L'ordre de complexité de  $N$  est le plus petit  $m$  tel que  $N$  soit  $m$ -réductible.

**Théorème.** *Un objet  $N$  de niveau  $n+1$  ayant une ramification  $(P, (\Pi^i))$  telle que les liens distingués de  $P$  sont  $(\Pi^i, \Pi^j)$ -simples est  $n-1$ -réductible, donc d'ordre de complexité  $\leq n-1$ .*

$N$  est colimite d'un diagramme  $D$  formé des  $\Pi^i$  et des clusters que recollent les  $g: P_i \rightarrow P_j$ .

# OBJET REDUCTIBLE



Un objet  $N$  de  $H$  est  $m$ -réductible s'il est colimite d'un diagramme dont les objets sont de niveau  $\leq m$ . L'ordre de complexité de  $N$  est le plus petit  $m$  tel que  $N$  soit  $m$ -réductible.

**Théorème.** *Un objet  $N$  de niveau  $n+1$  ayant une ramification  $(P, (\Pi^i))$  telle que les liens distingués de  $P$  sont  $(\Pi^i, \Pi^j)$ -simples est  $n-1$ -réductible, donc d'ordre de complexité  $\leq n-1$ .*

$N$  est colimite d'un diagramme  $D$  formé des  $\Pi^i$  et des clusters que recollent les  $g: P_i \rightarrow P_j$ . Un tel  $D$  n'existe pas si  $P$  a des liens complexes

**Théorème d'émergence.** *MP est une condition nécessaire pour qu'il existe des objets d'ordre de complexité  $> 1$ .*

# HIERARCHIE BASEE

Soit  $H$  une catégorie hiérarchique. Pour tout  $n$ , on note  $H_n$  la sous-catégorie pleine de  $H$  ayant pour objets les objets de niveaux  $\leq n$ .

**Définition.** On dit que  $H$  est une catégorie **basée sur**  $H_0$  si, pour tout  $n \geq 0$ , il existe une di-esquisse  $\delta_n$  sur  $H_n$  telle que  $H_{n+1}$  soit la  $\delta_n$ -complexification de  $H_n$ .

Par construction de la complexification, il s'ensuit que les objets de niveau  $n+1$  sont les colimites  $D_n^*$  des diagrammes  $D_n$  considérés dans  $\delta_n$ . Et les nouveaux morphismes de  $H_{n+1}$  sont des liens  $n$ -simples et (en présence de MP) des liens  $n$ -complexes émergents à ce niveau.

# HIERARCHIE BASEE

Soit  $H$  une catégorie hiérarchique. Pour tout  $n$ , on note  $H_n$  la sous-catégorie pleine de  $H$  ayant pour objets les objets de niveaux  $\leq n$ .

**Définition.** On dit que  $H$  est une hiérarchie **basée sur**  $H_0$  si, pour tout  $n \geq 0$ , il existe une di-esquisse  $\delta_n$  sur  $H_n$  telle que  $H_{n+1}$  soit la  $\delta_n$ -complexification de  $H_n$ .

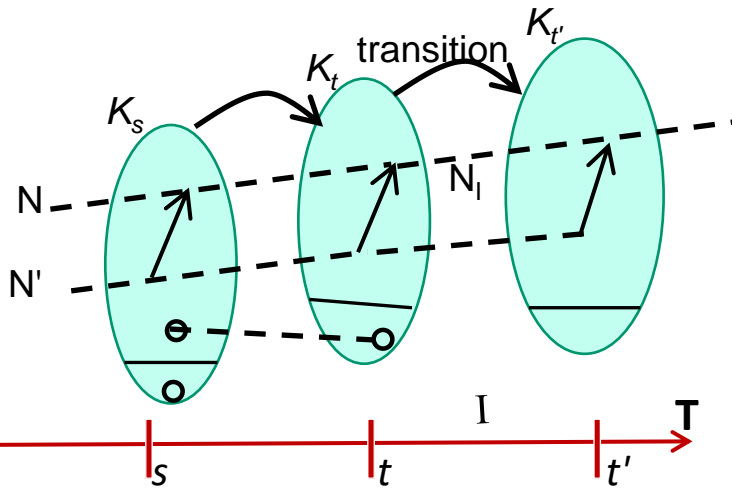
Par construction de la complexification, il s'ensuit que les objets de niveau  $n+1$  sont les colimites  $D_n^*$  des diagrammes  $D_n$  considérés dans  $\delta_n$ . Et les nouveaux morphismes de  $H_{n+1}$  sont des liens  $n$ -simples et (en présence de MP) des liens  $n$ -complexes émergents à ce niveau.

**Théorème.** *Dans une hiérarchie basée, tout morphisme est 0-simple ou 0-complexe. (i) Si tout morphisme est un lien 0-simple, alors la hiérarchie est **réductible**. (ii) En présence de MP, les complexifications successives peuvent conduire à la formation d'objets d'ordre de complexité croissant et de liens complexes de niveaux croissants.*

Dans le cas (ii), on dit que la hiérarchie dépend d'un "**Emergentist Reductionism**" (au sens de Matio Bunge).

# Application aux Systèmes Evolutifs Hiérarchiques

# SYSTÈME EVOLUTIF [EV 1987]F

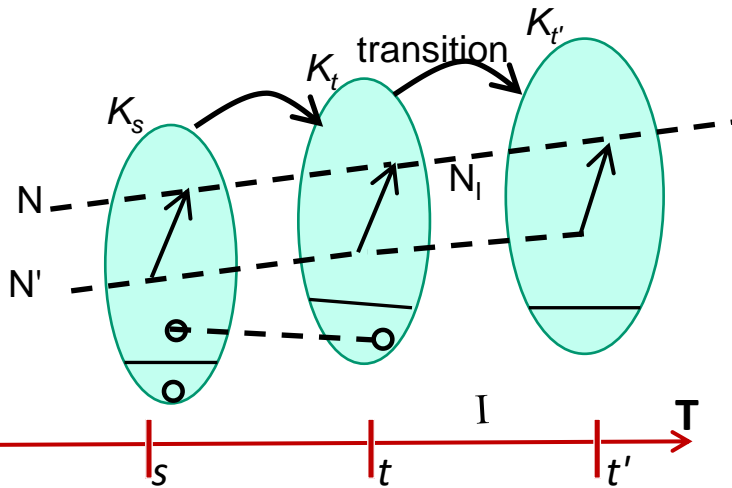


## Un Système Evolutif $K$

consiste en :

- (i) un intervalle  $T$  of  $\mathbb{R}$ ;
  - (ii) Pour tout  $t \in T$ , une catégorie configuration  $K_t$ ;
  - (iii) For  $t < t'$ , un foncteur partiel transition  $K(t, t')$  d'une sous-catégorie  $K_{tt'}$  de  $K_t$  vers  $K_{t'}$ ;
- ces données définissant un foncteur  $K: T^\circ \rightarrow ParCat$ .

# SYSTÈME EVOLUTIF [EV 1987]F



## Un **Système Evolutif K**:

consiste en :

- (i) un intervalle  $T$  of  $\mathbb{R}$ ;
  - (ii) Pour tout  $t \in T$ , une catégorie *configuration*  $K_t$ ;
  - (iii) For  $t < t'$ , un foncteur partiel *transition*  $K(t, t')$  d'une sous-catégorie  $K_{tt'}$  de  $K_t$  vers  $K_{t'}$ ;
- ces données définissant un foncteur  $K: T^\circ \rightarrow \text{ParCat}$ .

*Composant*  $N$  de  $K$  = famille maximale d'objets  $N_r$  de  $K_t$  reliés par des transitions. Les liens entre composants sont définis de même.

Pour  $I = ]t, t'[$ , soit  $K_I$  la catégorie ayant pour objets  $N_I$  les restrictions à  $I$  des composants  $N$  dont le support contient  $I$  ; les morphismes sont définis de même à partir des liens.

**Théorème.** *Les catégories  $K_I$  forment un faisceau de catégories sur  $T$  tel que*

(A) *Pour tout  $t'' \in I$  le foncteur de  $K_I$  vers la fibre  $K_{t''}$  est injectif.*

*On a une bijection entre les SE et les faisceaux satisfaisant (A).*



## CONCLUSION : APPLICATION AUX MES

Un 'Memory Evolutive System' est un Système Evolutif  $\mathbf{K}$  dans lequel les catégories sont hiérarchiques. Sa dynamique de  $t$  vers  $t' > t$  consiste en la formation, pour  $t \in T$ , d'une **complexification** d'une sous-catégorie de  $K_t$  (pour tenir compte des éléments 'supprimés') vers  $K_{t'}$ , ayant pour but d'ajouter des colimites à certains foncteurs  $D$  n'en ayant pas dans  $K_t$  tout en préservant certains cônes-colimites (changements 'standards' de Thom, 1978).

De ce qui précède, il résulte que, si MP est vérifié par certains diagrammes, au cours du temps, il y aura émergence d'objets multifacettes de complexité croissante, en particulier pour former une mémoire qui, grâce à MP, est à la fois robuste et flexible.

## MERCI