

# Incomplétude et Multiplicité, à la source de la Redondance Flexible et de l'Emergence

***Andrée C. EHRESMANN***

LAMFA, Université de Picardie Jules Verne

<http://ehres.pagesperso-orange.fr>

[ehres@u-picardie.fr](mailto:ehres@u-picardie.fr)

# Incomplétude en Théorie des Catégories en liaison avec la notion de partialité

## FONCTIONS PARTIELLES OU TOTALES ?

Extrait du site *nLab* (sur "Partial functions"):

"the most modern idea is that a function must be total. If you want partial functions, then you can get them in terms of total functions".

Différents moyens sont proposés pour cela, e.g. ajouter un 0 à la catégorie considérée, ou remplacer la fonction partielle par un span

Mais Brown le conteste et cite les travaux de Charles Ehresmann (e.g. pseudogroupes de transformations menant aux groupoïdes et aux structures locales), ajoutant :

"A possible reason for the difficulties some have of accepting groupoids rather than groups is that groupoids have a partial composition".

Pour appliquer CT à d'autres domaines (Géométrie, Analyse, Modèles de systèmes complexes), il faut respecter la 'singularité' et compléter de manière 'économique'

→ **2 approches 'philosophiques' différentes**

Approche 'globalisante'	Approche 'spécifique'
Fonction totale	Fonction partielle
Définition des catégories via leurs Hom	Définition par loi de composition partielle
'Grandes' catégories; Topos	'Petites' catégories ; groupoïdes ; usage des univers.
Foncteurs adjoints	Constructions d'objets libres
Catégories enrichies	Catégories internes
Théories algébriques	Théorie des esquisses et de leur prototype

## INCOMPLETUE DES SYSTEMES NATURELS COMPLEXES

La 2<sup>e</sup> 'philosophie' peut être utilisée pour construire un modèle intégral de systèmes évolutifs naturels tels les systèmes sociaux, biologiques ou cognitifs qui ne sont pas globalement réductibles aux modèles usuels de la Physique.

- Leurs composants et leurs interactions varient au cours du temps ;
- Ces composants sont répartis en niveaux de complexité avec émergence de composants de complexité croissante au cours du temps tels des composants 'multifacettes' leur donnant une redondance flexible ;
- Leur dynamique globale imprédictible émerge du 'jeu' entre les dynamiques locales (computables) d'un réseau d'agents co-régulateurs, opérant chacun sur son propre paysage .

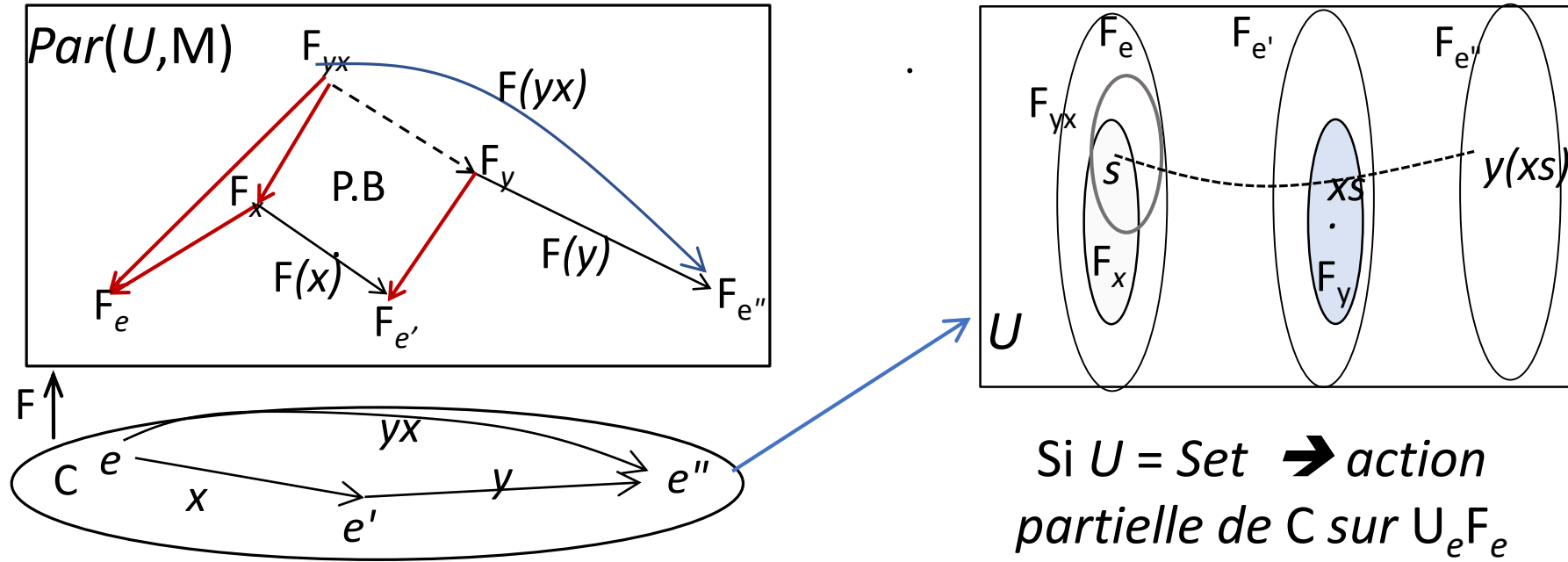
Ils seront modélisés par des Systèmes Evolutifs à Mémoire, comme montré dans :

*MES: A Mathematical Model for the Revival of Natural Philosophy* \*

\**Philosophies* 4, 9, 2019).

1. Actions partielles de catégories :  
Des Semi-faisceaux aux Systèmes Evolutifs  
via les Systèmes Guidables

# SCHEMA GENERAL D'UN (U, M)-SEMI-FAISCEAU

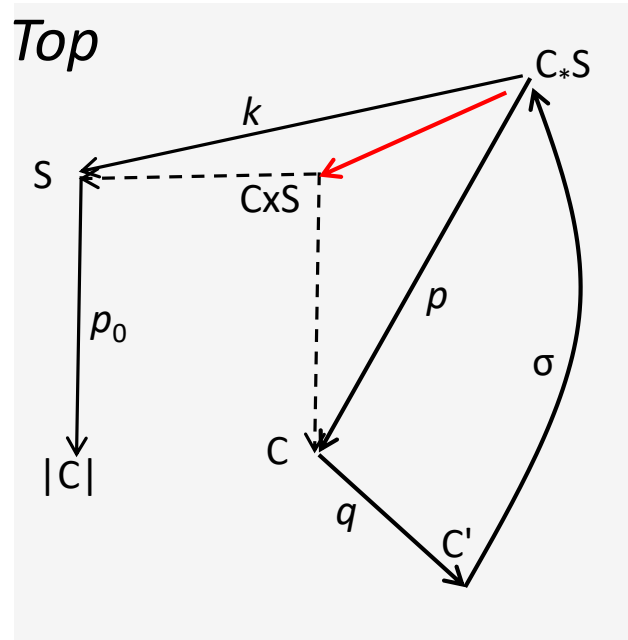


$U$  = catégorie avec pullbacks,  $M$  = sous-catégorie de monomorphismes définissant un ordre sur  $|U|$  et stable par P.B. On lui associe la *catégorie de spans*  $Par(U, M)$  de ses *applications partielles*. Exemples :  $Par(Set)$  ou  $Par(Cat)$ .

**Définition.** Un  $(U, M)$ -**semi-faisceau** sur  $C$  est un foncteur de  $C$  vers  $Par(U, M)$ .

**Théorème.** Si  $U$  a des colimites, un  $(U, M)$ -semi-faisceau admet une complétion universelle en un préfaisceau sur  $C^{op}$  (1962).

## SEMI-FAISCEAU ASSOCIE A UN SYSTEME GUIDABLE



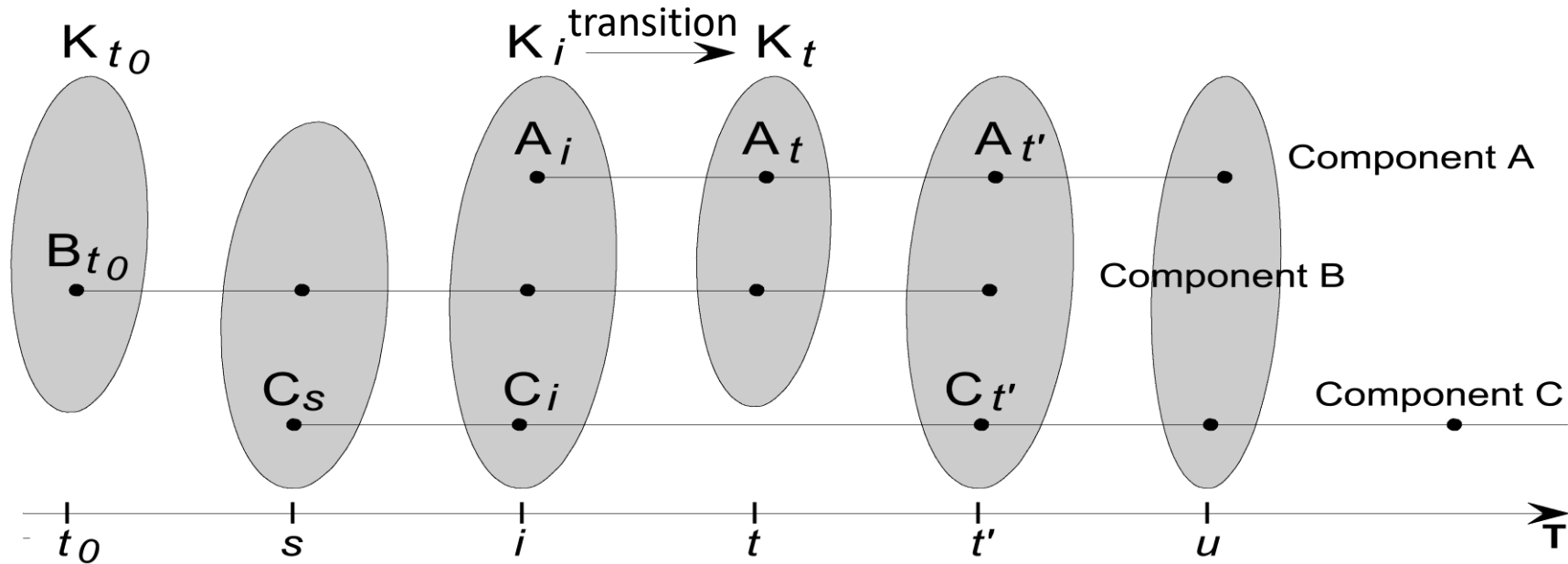
En vue de problèmes de contrôle et d'optimisation, j'ai introduit (1963-66) des semi-faisceaux d'ensembles  $F$  sur une catégorie  $C$  dont l'action partielle de  $C$  sur  $S = U_e F(e)$  soit sous-jacente à une action partielle interne à  $Top$  : on a des topologies sur  $C$  et sur  $S$  telles que la loi partielle  $k: C*S \rightarrow S$  soit continue d'un ouvert de  $CxS$  vers  $S$  ; on l'appelle "noyau d'espèce de structures"..

Un *système guidable* sur  $F$  est défini par un foncteur topologique  $q: C \rightarrow C'$ . Une *solution* est un foncteur topologique  $\sigma: C' \rightarrow C*S$  qui est une section locale de  $q\rho$ .

**Exemple:** Système guidable associé à un système d'équations différentielles qui dépendent de paramètres. Le composé  $xs$  est la valeur en  $e'$  de la solution d'une équation différentielle dépendant du paramètre  $x: e \rightarrow e'$  et admettant  $s$  pour condition initiale en  $e$  si elle existe.



# SYSTEME EVOLUTIF = SEMI-FAISCEAU K DE CATEGORIES SUR T



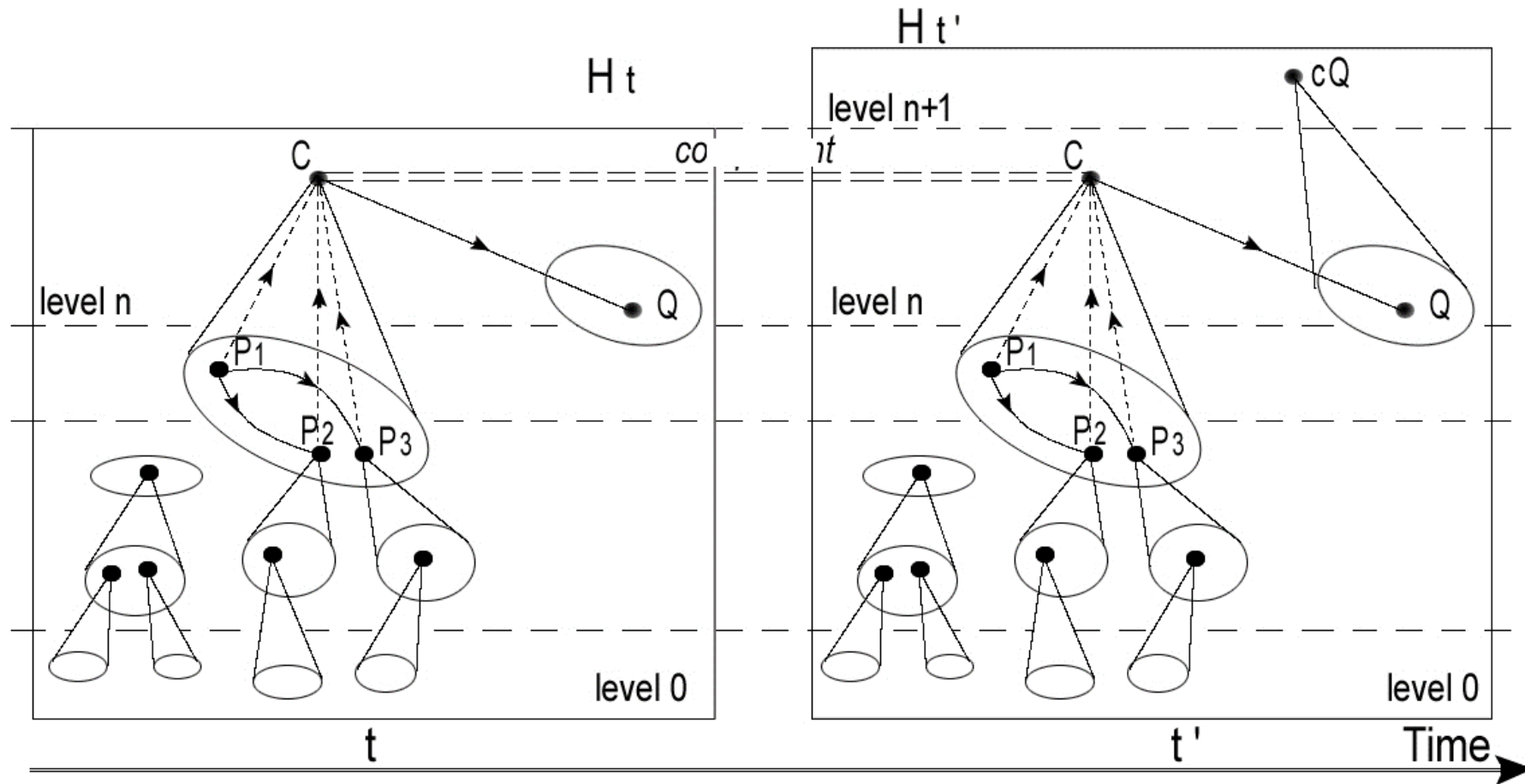
$T$  = catégorie associée à l'ordre sur un intervalle de  $\mathbf{R}$ .

*Composant A* de  $\mathbf{K}$  = famille maximale  $(A_t)$  d'objets  $A_t$  de  $K_t$  liés par transitions. On définit de même un *lien* entre composants.

On obtient un faisceau de catégories sur  $T$  en associant à tout intervalle ouvert  $J$  de  $T$  la catégorie  $K_J$  formée des composants et liens qui existent sur tout  $J$

*Généralisation* : Semi-faisceau à valeurs dans la catégorie des distributeurs, ou dans une catégorie de relations probabilistes (Prakash Panangaden).

# SYSTEME EVOLUTIF HIERARCHIQUE (SEH)



Un système naturel complexe sera représenté par un SE dont les configurations sont des catégories *hiérarchiques*  $H_t$  (pour représenter leur structure multi-niveaux) et dont les transitions respectent le niveau des composants.

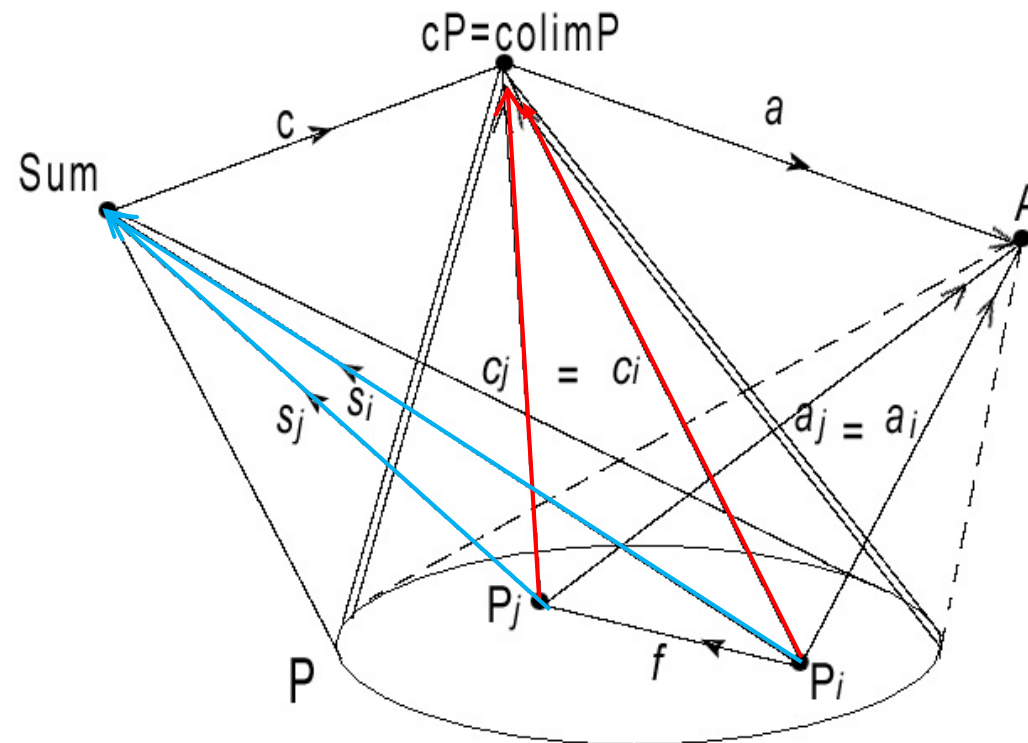
## 2. Le Principe de Multiplicité dans les Systèmes multi-niveaux

*Jacob* (1970) : "Tout objet que considère la Biologie représente un système de systèmes; lui-même élément d'un système d'ordre supérieur, il obéit parfois à des règles qui ne peuvent être déduites de sa propre analyse."

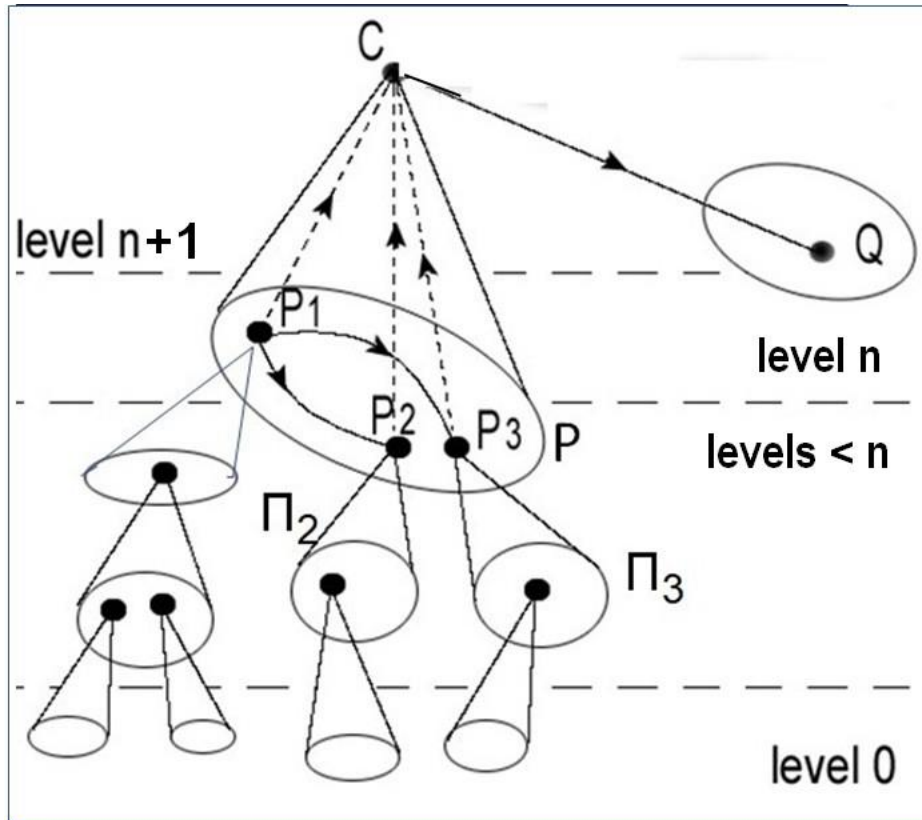
*Koestler* (1960) propose le mot *holon* pour décrire la nature "hybride" des composants des systèmes naturels complexes ; il les compare à des "Janus à 2 faces".

## "LE TOUT EST DIFFÉRENT DE LA SOMME DE SES PARTIES"

Soit  $P$  un *pattern* (= diagramme) dans une catégorie  $H$ . Pensons que les objets  $P_i$  de  $P$  sont les 'parties' d'un Tout et que ses morphismes représentent les interactions entre celles-ci. Le 'Tout' sera représenté par la *colimite*  $cP$  de  $P$ , si elle existe. S'il existe aussi le coproduit  $\text{Sum}$  des  $(P_i)_i$ , la différence entre  $\text{Sum}$  et  $cP$  est mesurée par  $c: \text{Sum} \rightarrow cP$ . La propriété universelle de la colimite entraîne que la formation de  $cP$  est une *propriété émergente* relativement à  $P$ .



# CATÉGORIES HIÉRARCHIQUES



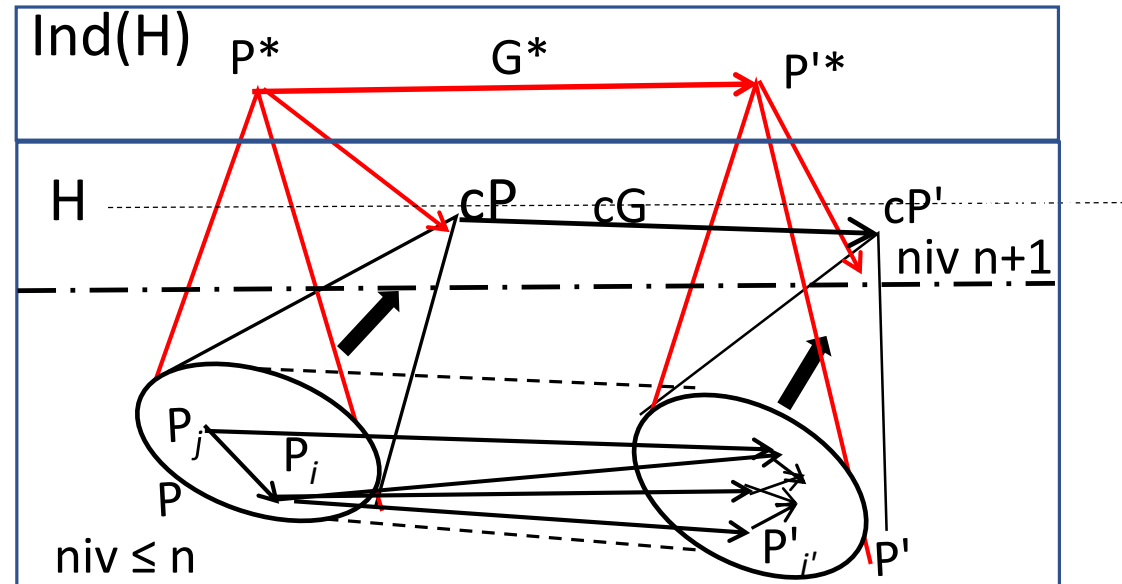
*Catégorie hiérarchique* = catégorie  $H$  dont les objets sont répartis en *niveaux de complexité* de sorte qu'un objet  $C$  de niveau  $n+1$  soit la colimite d'au moins un diagramme  $P$  dont les  $P_i$  sont de niveaux  $\leq n$ .

Chaque objet agit comme un holon :  $P_i$  est 'simple' pour  $C$  et 'complexe' pour  $\Pi_i$  dont il représente le 'Tout'.

Tout  $C$  de niveau  $> 0$  a au moins une *ramification* jusqu'au niveau 0

**Définition.** L'*ordre de complexité* d'un objet  $C$  est la plus petite longueur d'une de ses ramifications jusqu'au niveau 0..

# GERBES. LIENS n-SIMPLES



*Gerbe* de  $P$  vers  $P'$  = ensemble maximal  $G$  de morphismes de  $P$  vers  $P'$  tel que:

1. Tout  $P_i$  est lié par  $G$  à au moins un  $P'_i$ , et s'il l'est à plusieurs, ils sont liés par un zigzag de morphismes de  $P'$ .
2.  $G$  est stable par composition par  $P$  ou  $P'$ .

Si  $P$  et  $P'$  ont des colimites  $cP$  et  $cP'$  dans  $H$ ,  $G$  se recolle en un  $cG : cP \rightarrow cP'$ , appelé *lien*  $(P, P')$ -*simple*, ou *n-simple* si  $P$  et  $Q$  sont de niveaux  $\leq n$ .

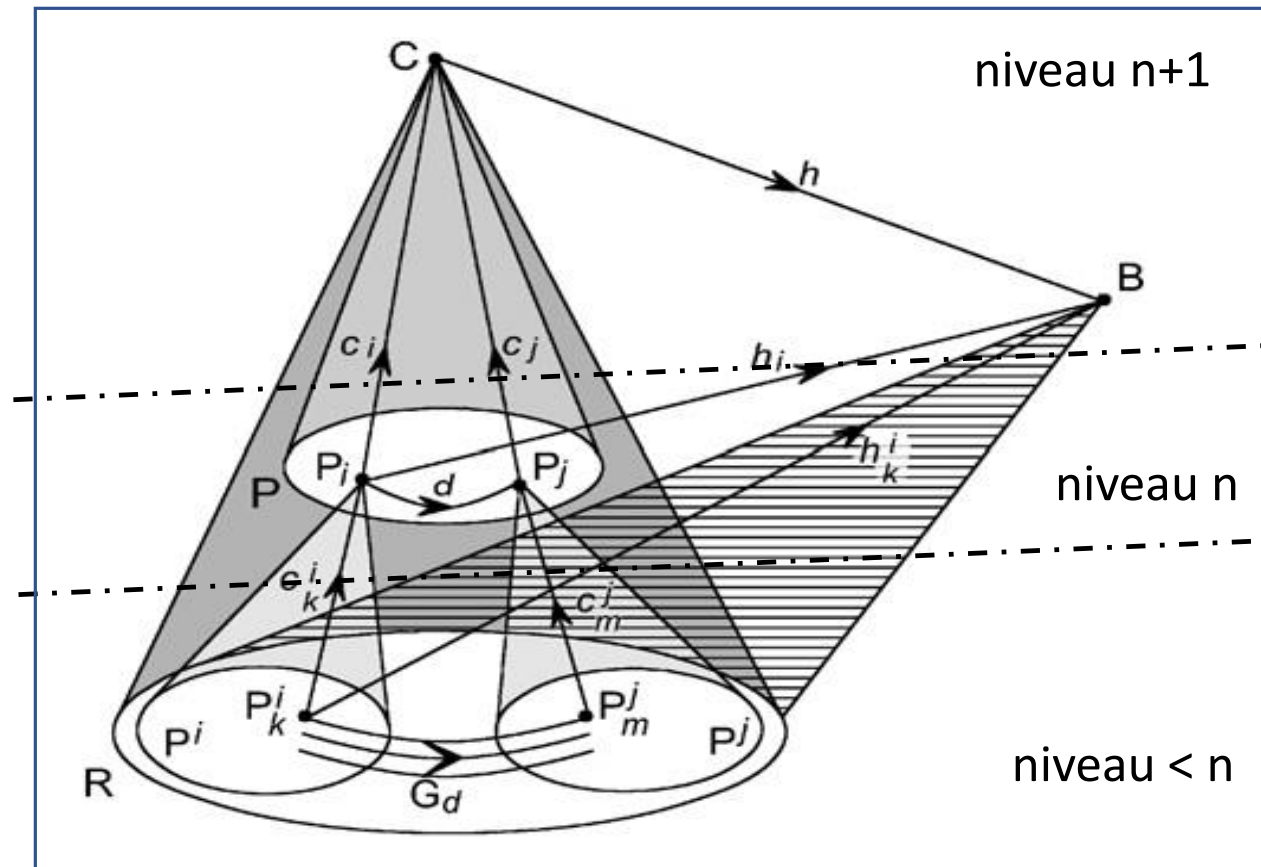
$\text{Ind}(H)$  est la catégorie ayant les patterns  $P$  dans  $H$  pour objets, et les gerbes pour liens.  $H$  s'identifie à une sous-catégorie de  $\text{Ind}(H)$  en identifiant  $C$  au pattern  $\{C\}$ .

**Définition.** Les patterns  $P$  et  $Q$  sont *homologues* si  $P^* | H$  est isomorphe à  $P'^* | H$ .

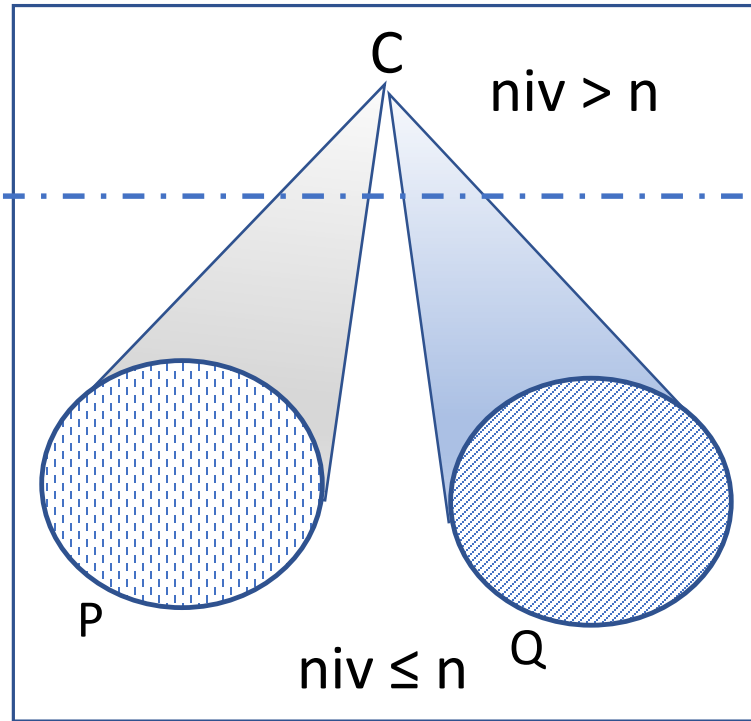
# THÉORÈME DE RÉDUCTION

La colimite  $C$  d'un pattern  $P$  dont tous les liens sont  $n$ -simples se 'réduit' à la colimite d'un pattern  $R$  de niveau  $< n$ .

→ *Pur réductionnisme au niveau 0 dans une catégorie hiérarchique dont tous les liens de niveau  $n+1$  sont  $n$ -simples, car tout objet est d'ordre de complexité  $\leq 1$ .*



## PRINCIPE DE MUTIPLICITE (MP) = REDONDANCE 'FLEXIBLE'



MP traduit catégoriquement la propriété de *dégénérescence* utilisée en Biologie :

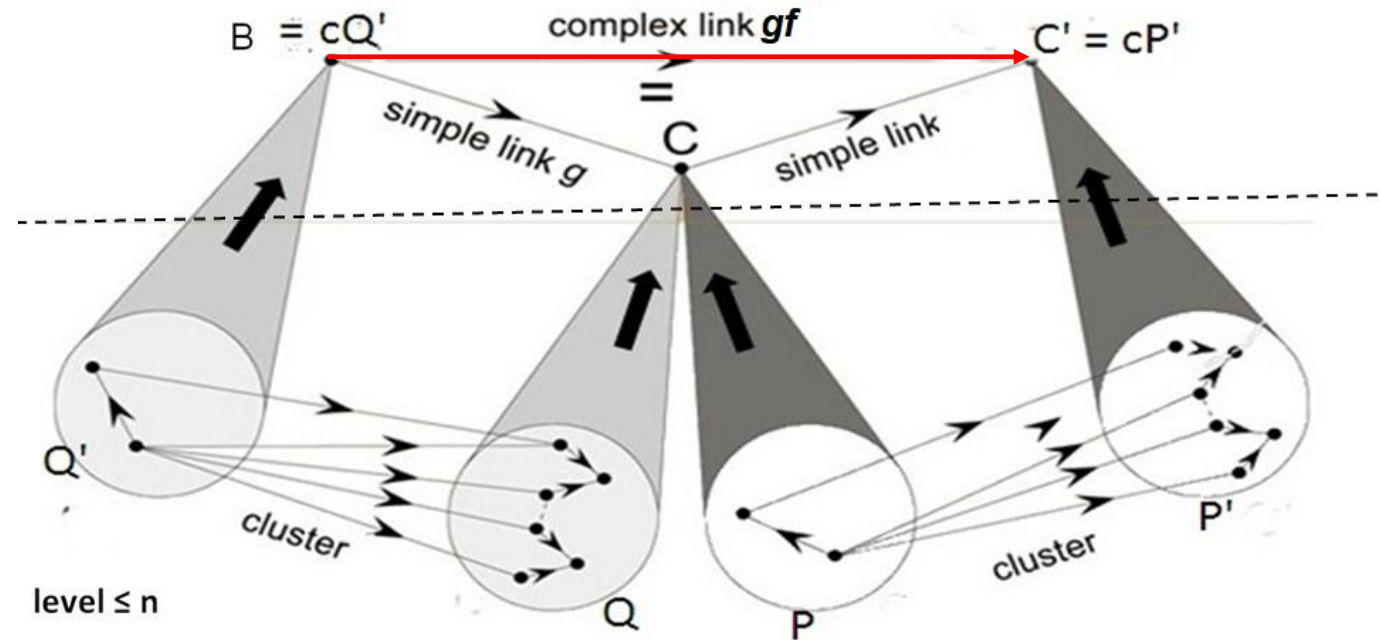
"the ability of elements that are structurally different to perform the same function or yield the same output..." (Edelman & Gally, 2001).

Une catégorie hiérarchique vérifie MP si, pour tout  $n$ , il existe des objets  $C$  de niveau  $> n$  qui sont *n-multifacettes* au sens :  $C$  est la colimite d'au moins 2 patterns  $P$  et  $Q$  de niveaux  $\leq n$  tels que l'identité de  $C$  ne soit ni  $(P, Q)$ -simple ni  $(Q, P)$ -simple ;  $P$  et  $Q$  sont alors dits *non connectés*.

*Cas particulier:* Si la catégorie est associée à un ordre  $(E, <)$ , ceci signifie qu'il existe des parties  $A$  et  $B$  de  $E$  telles que chacune a au moins un élément sans majorant dans l'autre.



## MP ASSURE L'EXISTENCE DE LIENS COMPLEXES



Un *lien  $n$ -complexe* est le composé de liens  $n$ -simples liant des gerbes non adjacentes et qui n'est pas  $n$ -simple.

Ces liens traduisent des propriétés globales des niveaux  $\leq n$  qui *émergent* au niveau  $n+1$  car non observables via les composants des patterns de niveaux inférieurs qh'ils recollent, tout en dépendant de la structure globale de ces niveaux. Ils sont à l'origine de la *non-réductibilité* du système, sa robustesse et sa flexibilité.

## CONSEQUENCES DE MP POUR LE SYSTEME

L'existence de composants multifacettes C assure une **redondance flexible** au système, ce qui lui procure de la **robustesse** et de la **flexibilité**, C ayant sa propre **individualité multiple** et pouvant intervenir via ses différentes décompositions selon le contexte.

MP augmente la complexité du système en permettant l'existence d'objets d'**ordre de complexité**  $\geq 2$  (donc **pas de réductionisme** au niveau 0).

MP est une condition nécessaire pour que, à chaque niveau  $n+1$ , il y ait **émergence** de nouveaux objets et de nouvelles propriétés (via les liens complexes entre eux) qui, bien que dépendant de la structure globale des niveaux inférieurs, leur soient autonomes et ressortent d'une **nouvelle logique**.

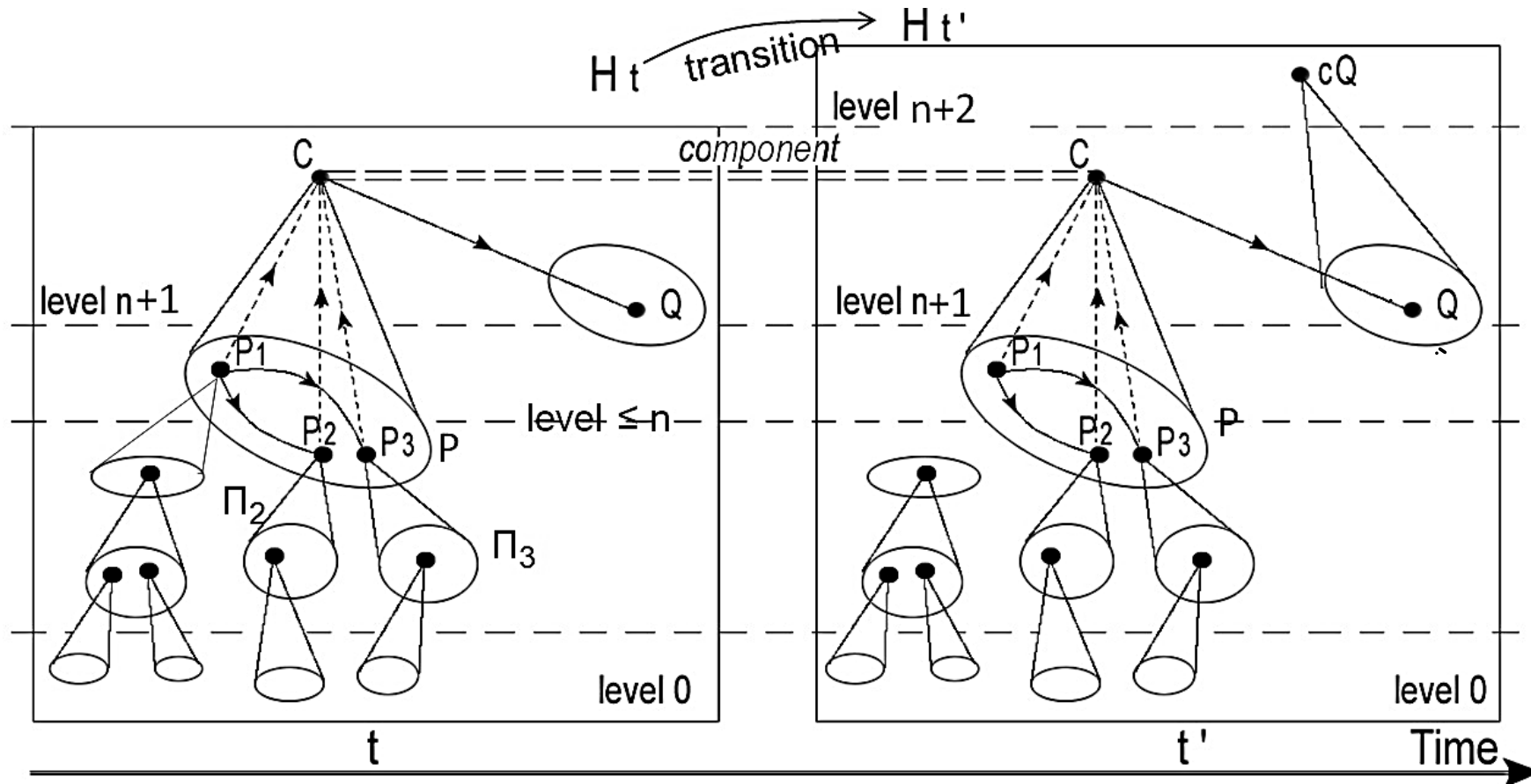
### 3. Changements dans les SEH : Processus de Complexification Emergence d'une Mémoire flexible

René Thom (1971): " la Dynamique, entendue au sens le plus général de science des actions du temps dans les états d'un système ".

Et il distingue 4 *transformations archétypales* :

" Naissance, Mort, Scission, Confluence " (1988).

# UN SEH DANS SON 'DEVENIR'



Soit  $H$  un SEH dont les configurations satisfont MP. Les transitions entre 2 instants sont engendrées par des *processus de complexification* qui correspondent à des changements structurels du type ajout, perte, combinaison de composants.

## PROCESSUS DE COMPLEXIFICATION

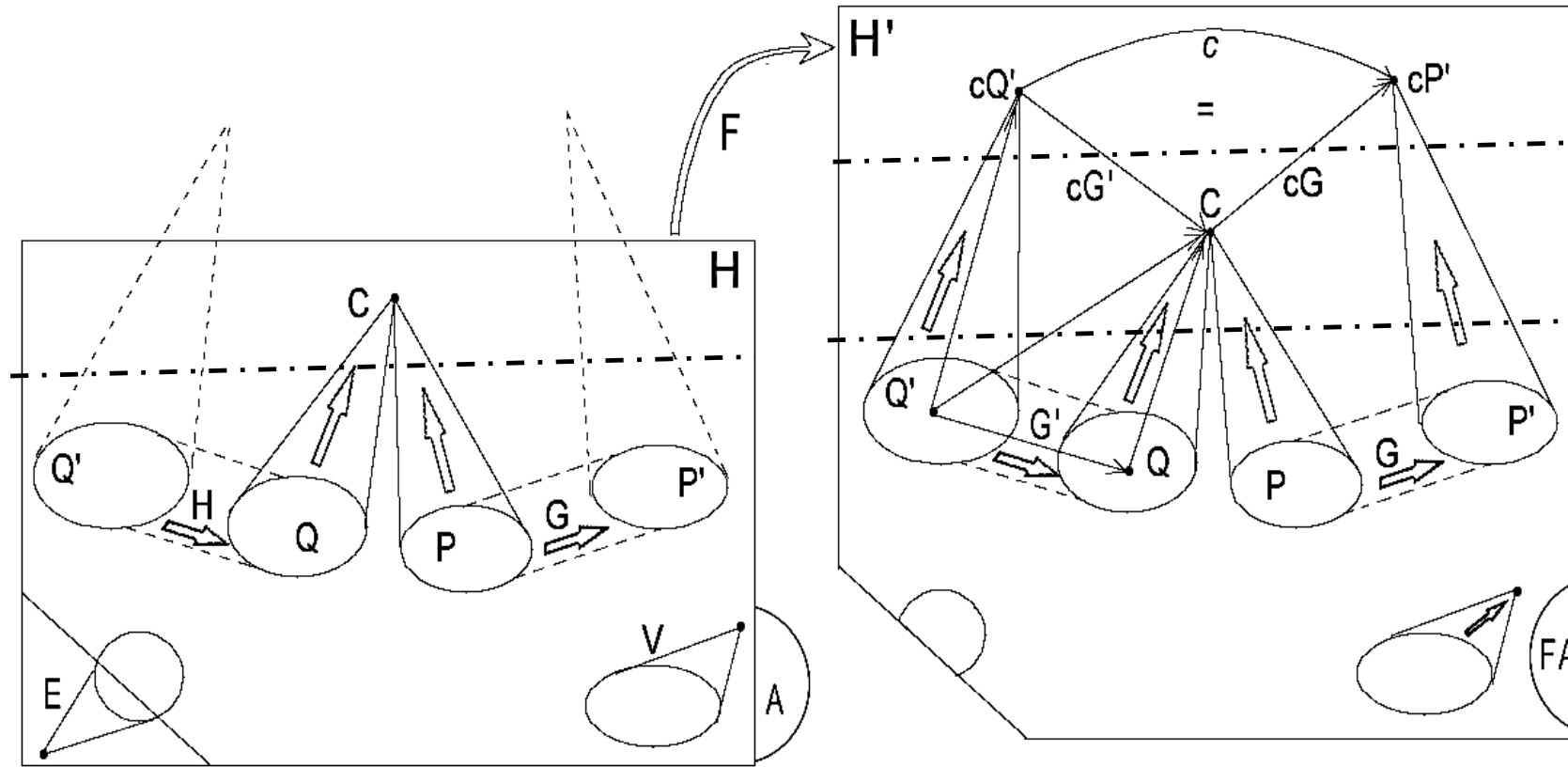
H est une catégorie hiérarchique vérifiant MP.

*Procédure* Pr sur H : Pr = (A, E,, U) où : A = graphe externe à H, E = sous-graphe de H, U = ensemble de patterns P dans H.

*Objectifs* : 'absorber' A, 'éliminer' E, 'ajouter' une colimite  $cP$  à tout  $P \in U$ ; si P a une colimite dans H, on la prend pour  $cP$ ; et on impose que  $cP = cQ$  si P et Q sont des éléments de U qui sont homologues dans H.

**Théorème de Complexification.** *La complexification  $H'$  de H pour Pr est solution du problème universel : 'plonger'  $H \setminus E$  dans une catégorie hiérarchique réalisant ces objectifs. Elle peut être construite explicitement par récurrence. Tout  $cP$  ajouté à H est d'un niveau supérieur à celui de P et, si P a des liens complexes, l'ordre de complexité de  $cP$  est aussi supérieur à celui de P.*

# CONSTRUCTION DE LA COMPLEXIFICATION $H'$ DE $H$ POUR $Pr$



La construction se fait par récurrence, dont chaque étape nécessite un grand nombre d'opérations pour 'forcer' les patterns dans  $U$  à avoir une colimite dans  $H'$ . Elle permet d'*anticiper 'conceptuellement'* le résultat  $H'$  de  $Pr$ , et donc d'évaluer différentes procédures. Toutefois sa réalisation 'physique' dans un système naturel où chaque opération a une certaine durée est difficile à anticiper (cf. plus loin).

## THEOREMES D'EMERGENCE

**Théorème.** *Dans un SEH, MP permet l'émergence, au cours du temps, de composants multifacettes dont les ordres de complexité croissent et de liens complexes entre eux. Ces éléments permettent, en particulier, de développer un sous-SEH représentant une Mémoire robuste et flexible de complexité croissante.*

**Complexification Itérée.** *Soit  $Pr = (A, E, U)$  une procédure sur  $H$  et  $Pr' = (A', E', U')$  une procédure sur la complexification  $H'$  de  $H$  pour  $Pr$ . S'il existe des patterns dans  $U'$  ayant des liens complexes, il n'existe pas de procédure  $Pr''$  sur  $H$  telle que  $H'$  soit la complexification de  $H$  pour  $Pr''$ .*

**Corollaire.** *MP rend le système imprédictible à long terme.*

C'est la présence de liens complexes (donc MP) qui empêche une anticipation à long terme en conduisant à des "changes in the conditions of change" (Popper) qui modifient la logique.

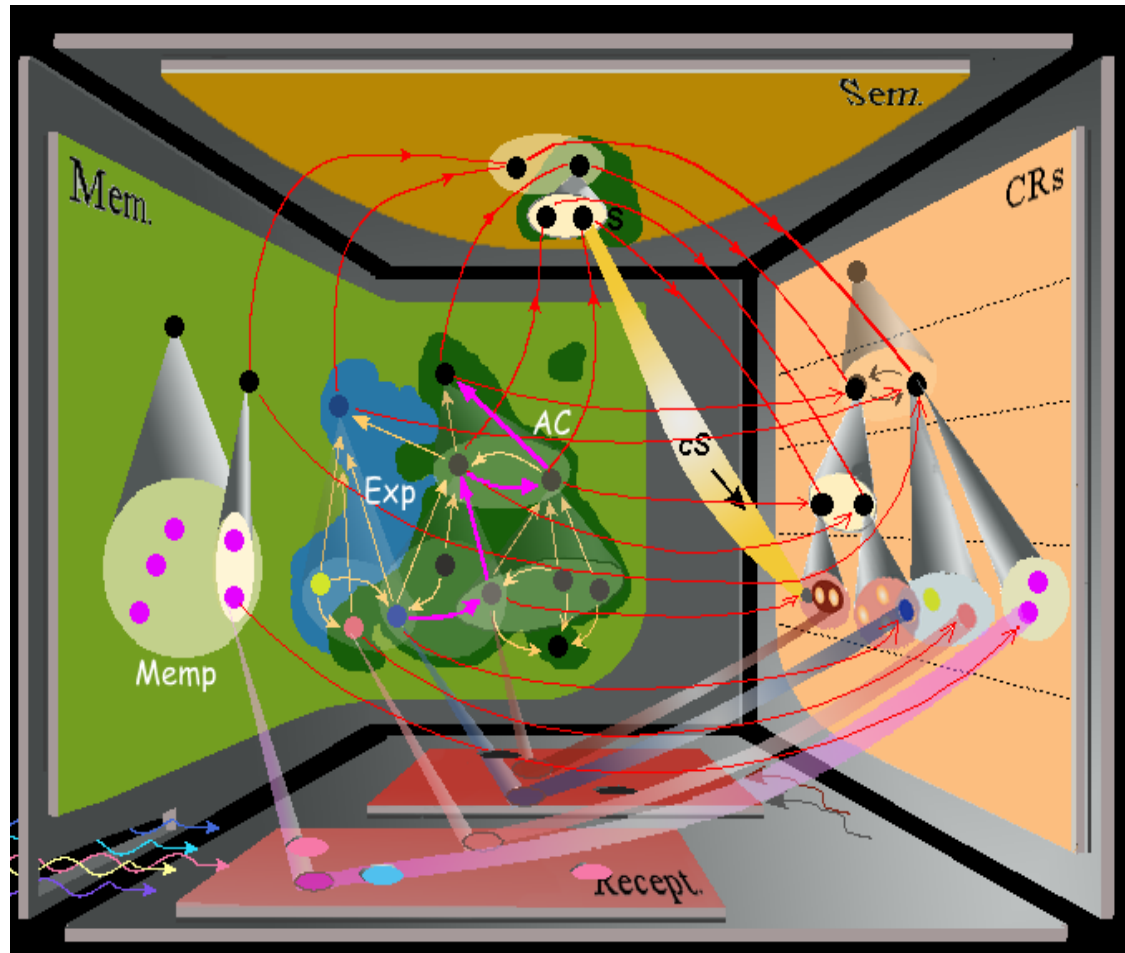
Ceci est aussi à la base de la *créativité transformationnelle* de M. Boden.

## 4. Systèmes Evolutifs à Mémoire (MES) pour modéliser les systèmes naturels complexes

En plus de sa structure modélisée par un SEH vérifiant MP, un système naturel complexe est soumis à diverses contraintes 'physiques' matérielles et temporelles. Sa dynamique est modulée par un réseau d'agents co-régulateurs.



# UN MES EN TANT QUE SYSTÈME DYNAMIQUE MULTI-AGENTS



Un MES est un système auto-organisé dont la dynamique est modulée par la coopération-compétition entre un réseau de sous-SE spécialisés, appelés *Co-Régulateurs* (CR). Ils opèrent avec l'aide du sous-SEH Mem, lequel représente une *mémoire* centrale flexible qu'ils peuvent mobiliser et qu'ils aident à développer.

La dynamique globale résulte des interactions entre les dynamiques locales des différents CRs.

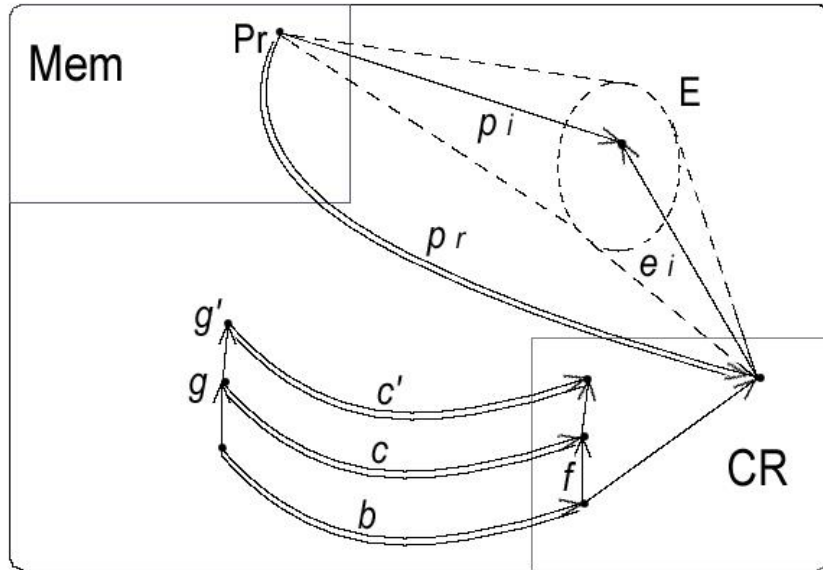
## CONTRAINTES TEMPORELLES ET MATERIELLES DANS UN MES

Dans un SEH, le temps n'intervient que par l'effet de son ordre

Dans un MES, plusieurs temporalités interviennent (via les CRs) et le système est aussi soumis à d'autres contraintes matérielles (e.g. énergie, température,...) dynamiques, mesurées par des observables. En particulier :

- Un composant a une *activité* et chaque lien entre composants a un *délai de propagation* et une *force* qui sont des fonctions à valeurs réelles, définies sur sa durée de vie. Un lien est *actif* ou non à un instant donné selon qu'il transmet ou non de l'information.
- Chaque co-régulateur CR opère de manière hybride dans le temps continu du MES en opérant par étapes, délimitées par sa propre échelle de temps discrète. Les durées des étapes des différents co-régulateurs sont très différentes.

# DYNAMIQUES LOCALES DES CO-REGULATEURS ET LEUR JEU



Un co-régulateur CR opère par étapes, selon son propre rythme et sa fonction. A chacune :

- (i) il forme son *paysage local* qui est un SE  $L$  ayant pour composants les liens actifs qui arrivent à CR pendant l'étape ;
- (ii) via  $pr$  dans  $L$ , il choisit une procédure  $Pr$  à l'aide de **Mem.** et envoie les commandes aux effecteurs.
- (iii) Ceci déclenche un processus dynamique 'classique' s'étendant jusqu'à la fin de l'étape (calculable e.g. via EDP).

Les commandes envoyées par les différents co-régulateurs en  $t$  peuvent ne pas être cohérentes, chacun ayant sa propre logique. La dynamique globale résulte d'un processus flexible d'équilibration (non calculable ?), le *jeu entre co-régulateurs*, pouvant causer une fracture à certains co-régulateurs.

## ADAPTER LA COMPLEXIFICATION A LA DYNAMIQUE

Considérons un MES sur lequel une procédure  $Pr = (A, E, U)$  a été choisie sur la configuration  $H_t$  à l'instant  $t$ . Comme  $Pr$  ne fixe que des changements structuraux sans tenir compte des contraintes dynamiques, la complexification 'universelle'  $H'$  de  $H_t$  pour  $Pr$  peut ne pas respecter ces contraintes. Dans ce cas, Il faut chercher s'il existe une catégorie  $H''$  réalisant les objectifs de  $Pr$  et respectant les contraintes dynamiques ; dans ce cas la propriété universelle de  $H'$  entraîne qu'il existe un foncteur partiel 'canonique'  $Diff: H' \rightarrow H''$ .

La complexification universelle  $H'$  suppose un 'univers ouvert'. C'est différent si on suppose qu'il existe une catégorie  $TOT$  qui est co-complète et qui contient les différents  $H_t$ . Dans ce cas, la complexification de  $H_t$  peut se construire comme avant, mais à l'intérieur de  $TOT$ . Il s'agirait alors d'une découverte pour  $\mathbf{H}$  de quelque chose qui pré-existe dans  $TOT$  et qu'on 'découvre' progressivement (Univers fermé).

## DIFFERENTES NOTIONS D'EMERGENCE

L'émergence est à la base de l'imprédictibilité pour un observateur humain.

*Emergence en termes de niveaux.* Même s'il ne considère qu'un cône  $P$  de niveau  $n$  et la colimite  $cP$  qui émerge au niveau  $n+1$ , l'observateur doit envisager *tous* les cônes de base  $P$  pour s'assurer 'physiquement' que  $cP$  est bien la colimite de  $P$  ; ceci nécessite un grand nombre d'opérations mentales qui prendraient un temps très grand. A fortiori il lui faut un temps très grand pour reconnaître qu'un composant est multifacettes.

*Emergence diachronique.* Le problème de vérifier 'physiquement' l'émergence d'un lien complexe exigerait des capacités mentales encore plus grandes. En effet même si l'observateur voit bien les 2 liens simples qui le composent, il lui faut reconnaître 'physiquement' le balancement médian de  $P$  à  $Q$  ; ceci exige la réalisation simultanée d'un grand nombre d'opérations, ce que l'homme ne sait pas faire.(cf. BJ). D'où la 'surprise' causée par le résultat.

La construction d'une complexification demanderait un grand nombre d'opérations successives de ces types, empêchant une anticipation du résultat.

## Explication de l'Emergence par Brian Johnson\*:

“Given that emergence is often the result of many interactions occurring simultaneously in time and space, an ability to, intuitively grasp it would require the ability to consciously think in parallel”.

1. 1+0+1+0+0+1+1+1+0+1+1+1+1+0+1+0+0+0+1+0+1+0+0+0+1 =
2. 1+0+0+1+0+0+1+1+0+1+0+0+1+0+1+1+0+1+1+0+0+1+1+1+0 =  
0+1+1+0+1+0+0+1+0+1+0+1+0+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+1+1 =
3. 0+1+1+0+1+0+0+1+1+1+0+0+0+0+1+0+1+0+0+1+1+0+1+1+1 =  
1+0+1+0+1+0+0+1+0+1+0+1+1+0+1+0+1+0+1+0+1+0+1+1+1 =  
0+0+1+1+1+0+1+1+0+0+1+1+0+0+0+1+0+1+1+0+0+1+1+0+0 =  
0+1+0+1+1+1+0+0+1+1+0+0+1+1+1+0+1+1+0+1+1+0+1+1+0 =  
1+0+0+1+0+0+1+1+0+1+1+0+1+0+1+1+0+0+0+1+1+0+0+1+1 =

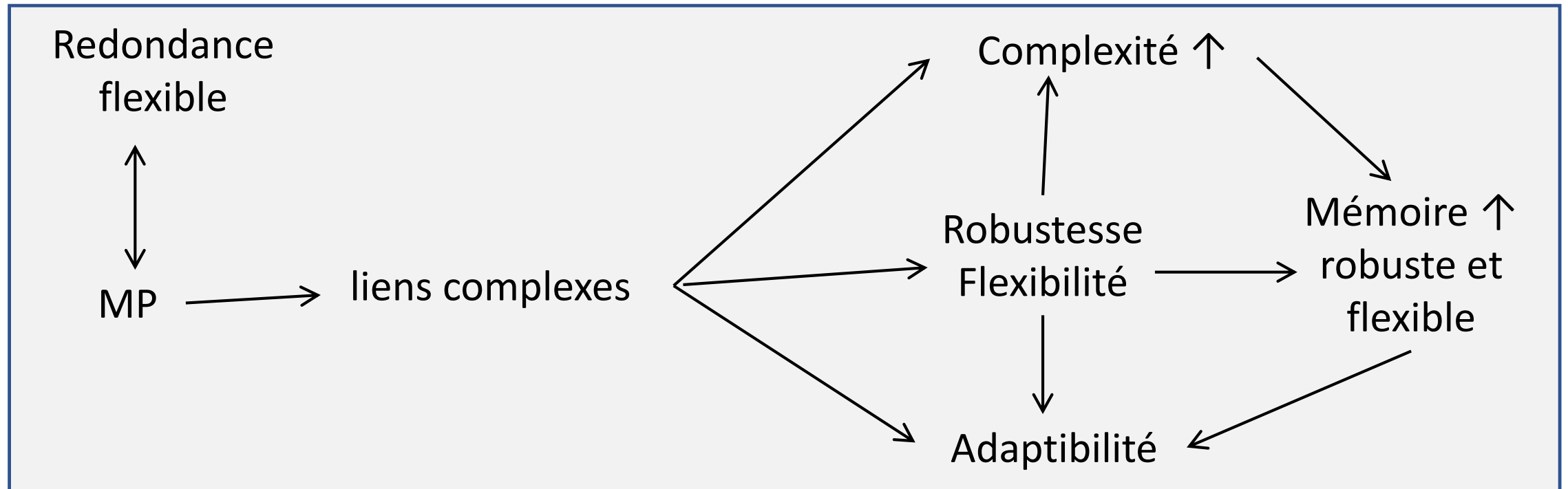
**Exercice.** "Add the numbers in part 1 and record the time it takes.

Now try to do the same for part 2 by scanning across both lines at the same time and adding in parallel. An ability to add in parallel would allow you to complete part 2 in the same time it took you to complete part 1. Now try part 3.

\*"Eliminating the mystery from the concept of emergence", *Biology and Philosophy*, 2010.

## CONCLUSION

Les MES donnent un modèle pour des systèmes naturels complexes qui dépendent d'un *réductionisme émergent* (Bunge) : il y a émergence à chaque niveau de nouvelles propriétés, représentées par des liens complexes, qui changent la logique du niveau. L'évolution consiste en successions de complexifications, elles-mêmes causant de nouvelles incomplétudes rendant le système imprédictible à long terme. MP est à la base des principales propriétés du système.



Merci pour votre attention